Cap.I Noțiuni introductive

1.1 Mulțimi. Operații cu mulțimi

O *mulțime* este o colecție de obiecte distincte pe care le numim *elemente*. Exemple: mulțimea literelor scrise pe această pagină, mulțimea rădăcinilor unei ecuații, mulțimea numerelor pare.

Modul convențional de a scrie o mulțime este să-i listăm toate elementele între două acolade:

$$A = \{a\} \qquad B = \{a,b\} \qquad C = \{a,b,c\} \tag{1}$$

Mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$
Mulțimea pătratelor numerelor naturale $\{0,1,4,9,\dots\}$
Mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$

Elementele unei mulțimi trebuie să fie distincte, iar ordinea elementelor nu contează.

$$\{a,b\} = \{b,a\}$$

Scrierea $x \in A$, înseamnă că *x* este un element al mulțimii *A*. De exemplu, $2 \in \mathbb{N}$. Scrierea $y \notin A$, înseamnă că *y* nu este un element din mulțimea *A*.

Compararea mulțimilor

Scrierea $A \subset B$ înseamnă că mulțimea *A* este inclusă în mulțimea *B* sau *A* este *submulțime* pentru *B*, ceea ce implică că fiecare $x \in A$ este şi element în a doua mulțime, $x \in B$. De exemplu $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Notăm cu ϕ mulțimea vidă. Pentru orice mulțime *A* avem $\phi \subset A$.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ şi } B \subset A \tag{2}$$

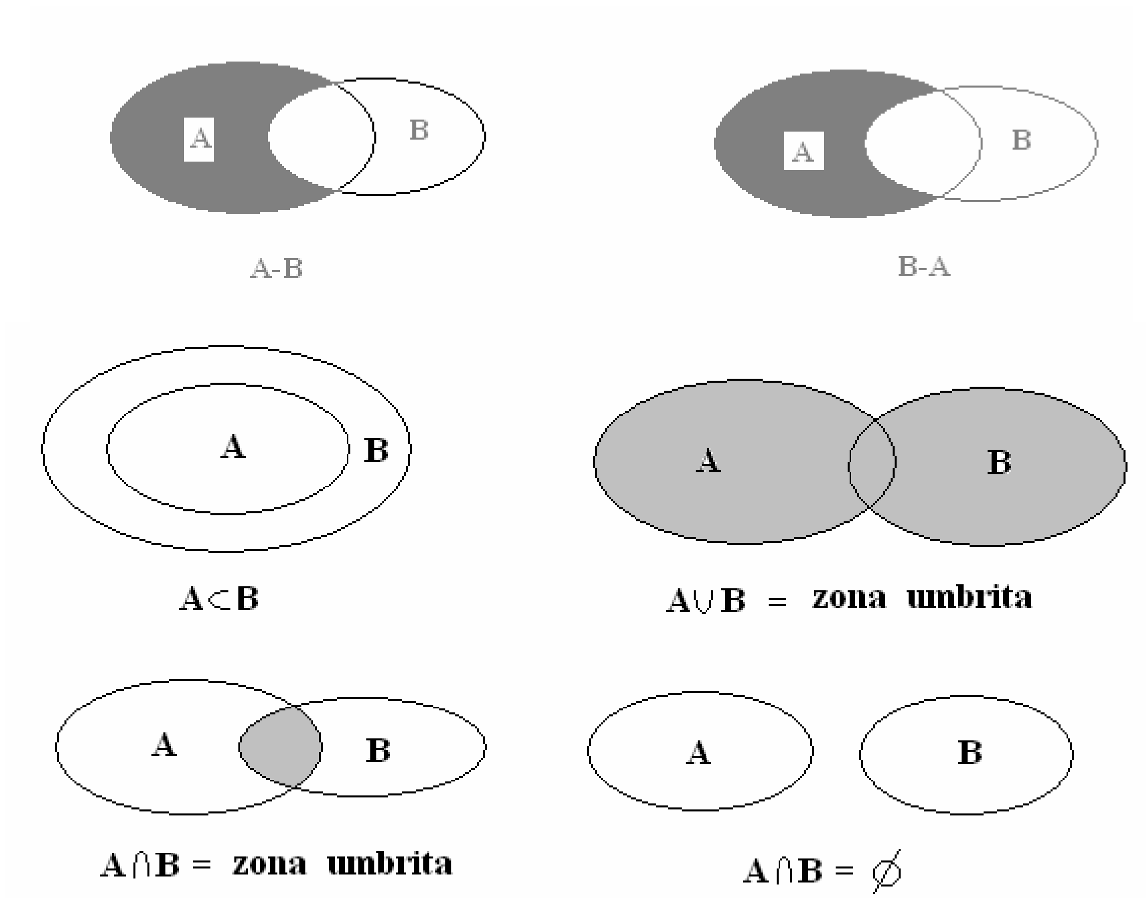
Operații cu mulțimi

Fie *A* şi *B* două mulțimi.

Reuniunea lui A cu B, notată $A \cup B$, este mulțimea tuturor elementelor $x \in A$ sau $x \in B$.
Intersecția lui A cu B, notată $A \cap B$, este mulțimea tuturor elementelor $x \in A$ şi simultan $x \in B$.
Diferența lui A cu B, notată $A - B$, este mulțimea tuturor elementelor $x \in A$ şi $x \notin B$.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ si } x \in B\}$$
$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ si } x \notin B\}$$

Dacă $A \cap B = \phi$, A şi B se spune că sunt mulțimi *disjuncte*.



Definiția reuniunii şi intersecției de două mulțimi poate fi extinsă la un număr finit sau chiar infinit de mulțimi. Astfel,

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup \ldots \cup A_n \qquad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \quad (3)$$

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap \ldots \cap A_n \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \quad (4)$$

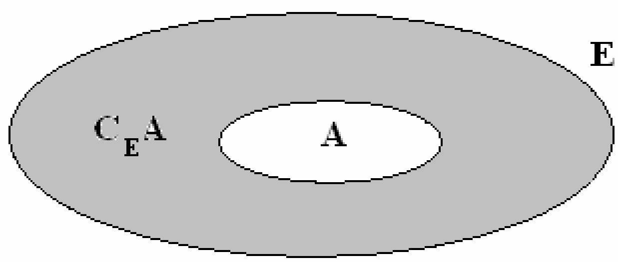
Exemple:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]=[0,1)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[0,\frac{1}{n}\right]=\{0\}$$

Fie $A\subset E$. Numim *complementara* mulțimii *A* în raport cu *E*, mulțimea notată $C_E A$, unde

$$C_E A = E - A = \{x \mid x\in E \text{ si } x\notin A\} \qquad (5)$$

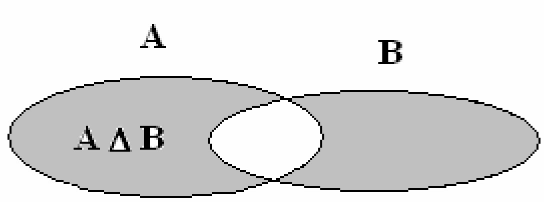


Proprietăți:
1. $A\cap C_E A=\varnothing$
2. $A\cup C_E A=E$
3. $C_E\left(C_E A\right)=A$
4. $C_E\left(A\cup B\right)=C_E A\cap C_E B$
5. $C_E\left(A\cap B\right)=C_E A\cup C_E B$

Ultimele două egalități poartă numele de *relațiile lui De Morgan*.

Diferența simetrică a două mulțimi *A* şi *B* este mulțimea elementelor lor necomune.

$$A\Delta B=\left(A-B\right)\cup\left(B-A\right) \qquad (6)$$



Proprietăți:

1. $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
2. $A \Delta A = \varnothing$

Produsul cartezian a două mulțimi *A* şi *B* este mulțimea de perechi (a,b), $a \in A$ şi $b \in B$.

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A \text{ si } b \in B\} \qquad (7)$$

Exemplu: $A = \{0,2,4,6,8\}$ şi $B = \{1,2,3,4\}$

$$A \cup B = \{0,1,2,3,4,6,8\}$$
$$A \cap B = \{2,4\}$$
$$A - B = \{0,6,8\}$$
$$B - A = \{1,3\}$$
$$A \Delta B = \{0,1,3,6,8\}$$

$$A \times B = \begin{Bmatrix} (0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4), \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(8,1),(8,2),(8,3),(8,4) \end{Bmatrix}$$

Proprietățile operațiilor cu mulțimi:

1. Reuniunea, intersecția şi diferența simetrică sunt comutative:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A, \quad A \Delta B = B \Delta A$$

Diferența şi produsul cartezian nu sunt comutative.

2. Reuniunea, intersecția şi diferența simetrică sunt asociative:

$$\begin{gathered} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C) \end{gathered} \qquad (8)$$

3. Intersecția este distributivă față de reuniune:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad (9)$$

4. Reuniunea este distributivă față de intersecție:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad (10)$$

O mulțime este *finită* dacă are un număr finit de elemente. Mulțimea locuitorilor orașului Timișoara este finită. *Cardinalul* unei mulțimi finite reprezintă numărul elementelor din acea mulțime. Vom nota cu $cardA$, cardinalul mulțimii A.

Proprietăți:

1. $card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B) \qquad (11)$

2. $card(A \cup B \cup C) = cardA + cardB + cardC - card(A \cap B) - card(B \cap C) - card(A \cap C) +$
$+card(A \cap B \cap C) \qquad (12)$

3. $card(A - B) = cardA - card(A \cap B) \qquad (13)$

4. $card(A \times B) = cardA \cdot cardB \qquad (14)$

Exemplu:

In anul întâi sunt în total 25 de studenți. 14 dintre ei s-au înscris la cursul de matematică, 12 studenți sau înscris la cursul de chimie, iar 13 au participat la cursul de fizică generală. 6 dintre ei s-au înscris şi la chimie şi la fizica, 5 s-au înscris şi la chimie şi la matematică, 7 s-au înscris şi la fizică şi la matematică, iar 2 studenți s-au înscris la toate cele trei cursuri. Câți studenți nu s-au înscris la nici un curs?

Reprezentăm prin diagrame mulțimea M a studenților care s-au înscris la cursul de matematică, respectiv mulțimile C şi F ale studenților care s-au înscris la chimie, respectiv fizică. Din enunț rezultă că:

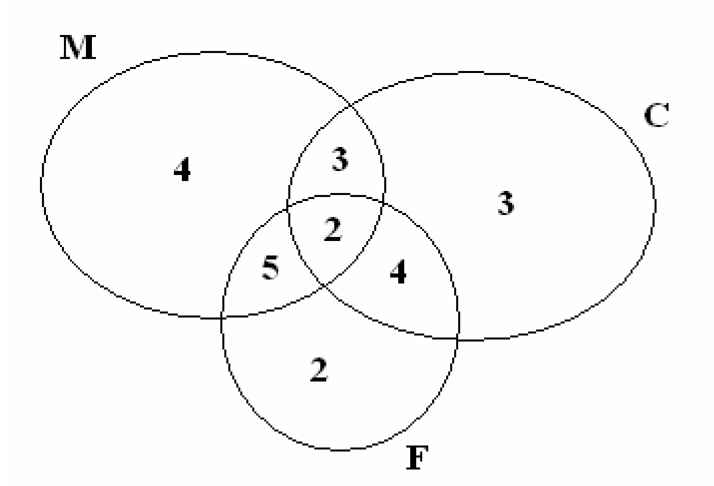
$cardM = 14 \qquad cardC = 12 \qquad cardF = 13 \qquad card(M \cap C \cap F) = 2$

$card(F \cap C) = 6 \qquad card(C \cap M) = 5 \qquad card(F \cap M) = 7$

$$card\left(M \cup C \cup F\right) = cardM + cardC + cardF - card\left(M \cap C\right) - card\left(C \cap F\right) - card\left(M \cap F\right) +$$
$$+ card\left(M \cap C \cap F\right)$$

$$card\left(M \cup C \cup F\right) = 14 + 12 + 13 - 5 - 6 - 7 + 2 = 23$$

În concluzie, doi studenți nu s-au înscris la nici unul din cele trei cursuri.



Numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este 2^n.

Exemplu: Submulțimile mulțimii cu trei elemente $\{a,b,c\}$ sunt:

$$\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,b\},\ \{b,c\},\ \{a,c\},\ \{a,b,c\}$$

O mulțime este *infinită* dacă nu este finită. Mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$ este infinită.

Fie A şi B două mulțimi. Spunem că există o *corespondență unu-la-unu* între A şi B dacă fiecare element din A este asociat cu un element din B astfel încât:

(i) elemente distincte din A sunt asociate cu elemente distincte din B

(ii) fiecare element din B este pus în corespondență cu un element din A.

In această situație spunem că mulțimile A şi B sunt *echivalente* şi scriem $A \approx B$.

O mulțime infinită se spune că este *numărabilă* dacă poate fi pusă în corespondență unu-la-unu cu mulțimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale. Orice mulțime infinită conține o submulțime numărabilă.

Mulțimea numerelor raționale este numărabilă, iar mulțimea numerelor reale nu are această proprietate.

1.2 *Numere reale*

Numerele $\ldots,-2,-1,0,+1,+2,\ldots$ se numesc numere întregi.

Numerele raționale se scriu ca o fracție de forma $\pm\frac{p}{q}$, unde p şi q sunt numere întregi pozitive $p \geq 0$ şi $q > 0$. Toate numerele raționale pot fi scrise, în urma unui proces de împărțire, în formă de fracție zecimală:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\ldots \tag{15}$$

unde α_0 este un întreg pozitiv şi $\alpha_k\left(k = 1,2,\ldots\right)$ sunt cifre zecimale. Fracția zecimală din dreapta relației (15) se numeşte *reprezentare zecimală* a numărului rațional p/q. Reprezentarea zecimală poate fi pusă sub forma unei serii infinite:

$$\alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{10^i}$$

Reprezentarea zecimală poate fi una *finită*

$$\frac{p}{q} = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 00\ldots \qquad \left(\alpha_m > 0\right) \tag{16}$$

sau una *infinită periodică*

$$\frac{p}{q} = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\beta_1\ldots\beta_k\beta_1\ldots\beta_k\ldots = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\left(\beta_1\ldots\beta_k\right) \tag{17}$$

Incepând cu poziția $m+1$, un bloc finit de cifre $\beta_1\ldots\beta_k$ se repetă indefinit şi nu toate cifrele β_j sunt nule.

Prima formă cea finită, poate fi redusă la cea de-a doua impunând

$$\frac{p}{q} = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}\left(\alpha_m - 1\right)99\ldots \tag{18}$$

De exemplu, $0.5 = 0.4(9)$

$3.5 = 3.4(9)$

$1.0 = 0.(9)$

Pentru a demonstra ultima egalitate, se foloseşte seria numită progresie geometrică:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{aq}{1-q}, \quad |q|<1$$

$$0.(9) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} \quad \text{deci } a = 9 \text{ şi } q = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

Se vede că această serie infinită are suma egală cu 1.

Pe lângă fracțiile zecimale periodice există şi fracții zecimale neperiodice, de exemplu:

$0.1010010001\ldots$, $0.121122111222\ldots$, $\sqrt{2} = 1.41\ldots$ şi numărul π.

Definiție: Prin număr *irațional* înțelegem o fracție zecimală infinită neperiodică arbitrară

$$a = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots \tag{19}$$

unde α_0 este un întreg pozitiv şi $\alpha_k\ (k = 1,2,\ldots)$ sunt cifre zecimale.

Reuniunea numerelor raționale şi iraționale formează mulțimea *numerelor reale*.

Prin convenție, mulțimea numerelor naturale, întregi, raționale şi reale se notează cu $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}$ respectiv.

Proprietățile numerelor reale

Mulțimea numerelor reale este o mulțime ordonată de relația <, care are următoarele proprietăți.

I. *Proprietăți de ordine*:

I.1. Pentru orice pereche de numere reale *a* şi *b* are loc una şi numai una din relațiile:

$$a = b, \quad a < b \quad \text{şi} \quad a > b$$

I.2. Dacă $a < b$ şi $b < c$, atunci $a < c$ (tranzitivitatea relației exprimate prin simbolul $<$)

I.3. Dacă $a < b$, atunci există un număr *c* astfel încât $a < c < b$.

Pe mulțimea numerelor reale, sunt definite operațiile de adunare şi înmulțire astfel încât fiecărei perechi de numere reale li se asociază în mod unic numerele reale numite sumă şi produs.

II. *Proprietățile operațiilor de adunare şi scădere:*

II.1. $a+b=b+a$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$ comutativitate
II.2. $(a+b)+c=a+(b+c)$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ asociativitate
II.3. $a+0=a$, $\forall a\in\mathbb{R}$
II.4. $a+(-a)=0$, $\forall a\in\mathbb{R}$
II.5. $a<b\Rightarrow a+c<b+c$ pentru oricare *c* real.

III. *Proprietățile operațiilor de înmulțire şi împărțire:*

III.1. $ab=ba$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$ comutativitate
III.2. $(ab)c=a(bc)$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ asociativitate
III.3. $a\cdot 1=a$, $\forall a\in\mathbb{R}$
III.4. $a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)=1$, $a\neq 0$
III.5. $(a+b)c=ac+bc$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ distributivitate
III.6. $a<b,\ c>0\ \Rightarrow\ ac<bc$.

Valori absolute pentru numere reale

Fie *a* un număr real. Valoarea absolută sau modulul lui *a* este egal cu *a* dacă *a* este pozitiv şi este egal cu $-a$ dacă *a* este negativ. Valoarea absolută a lui zero este zero. Notăm valoarea absolută a lui *a* cu $|a|$ şi scriem

$$|a|=\begin{cases} a, a\geq 0 \\ -a, a<0 \end{cases} \tag{20}$$

Inegalitatea $|a|<\varepsilon$ cu $\varepsilon>0$, este echivalentă cu

$$-\varepsilon<a<+\varepsilon \tag{21}$$

Inegalitatea $|a-b|<\varepsilon$ este echivalentă cu

$$b-\varepsilon<a<b+\varepsilon \tag{22}$$

Proprietăți:

1. $|a| \geq 0$ (23)

2. $|a| = |-a|$ (24)

3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ (25)

4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$ (26)

5. $|a+b| \leq |a| + |b|$ (27)

Intr-adevăr,

$$-|a| \leq a \leq |a|$$
$$-|b| \leq b \leq |b|$$
$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

6. $||a| - |b|| \leq |a-b|$ (28)

Intr-adevăr,

$$|a| = |(a-b) + b| \leq |a-b| + |b|$$
$$|a| - |b| \leq |a-b|$$
$$|b| = |(b-a) + a| \leq |b-a| + |a| = |a-b| + |a|$$
$$-|a-b| \leq |a| - |b|$$
$$-|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|$$
$$||a| - |b|| \leq |a-b|$$

Dreapta reală

Numerele reale pot fi reprezentate şi cu ajutorul *dreptei reale*. Considerăm o dreaptă, pentru care fixăm direcția, originea O şi distanța unitate e.

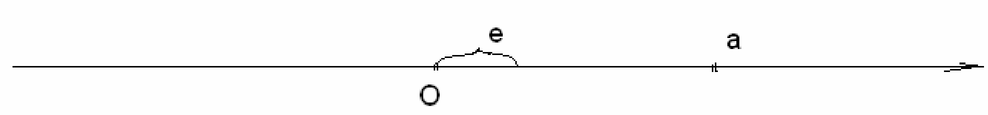


Figura 1.1 Dreapta reală

Fiecărui număr real $\pm a$ $(a > 0)$ i se asociază un punct pe dreaptă aflat la distanța a de origine, în dreapta sau în stânga lui O, funcție de semnul $+$ sau semnul – din fața lui a. Desigur, numărului $a = 0$ i se asociază punctul arbitrar origine.

Definiție: Dreapta a cărui puncte sunt în corespondență unu-la-unu cu elementele mulțimii numerelor reale se numeşte *dreapă reală*.

Fie a şi b două numere reale (puncte) care satisfac inegalitatea $a < b$.
Cu ajutorul lor putem defini următoarele mulțimi numite *intervale*:

$[a,b]$ toate numerele reale x astfel încât $a \le x \le b$ şi se numeşte interval închis
(a,b) toate numerele reale x astfel încât $a < x < b$ şi se numeşte interval deschis
$[a,b)$ toate numerele x reale astfel încât $a \le x < b$ şi se numeşte interval semideschis
$(a,b]$ toate numerele x reale astfel încât $a < x \le b$ şi se numeşte interval semideschis

şi intervalele infinite:

$(a,+\infty)$ mulțimea numerelor reale x cu $x > a$
$[a,+\infty)$ mulțimea numerelor reale x cu $x \ge a$
$(-\infty,b)$ mulțimea numerelor reale x cu $x < b$
$(-\infty,b]$ mulțimea numerelor reale x cu $x \le b$
$(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

Exerciții:

$|x-1| \le 0.01$ $\qquad$ $|x+2| \ge 3$ $\qquad$ $\frac{1}{2} \le |x| \le 4$ $\qquad$ $|x-1| + |x| > 1$

Vecinătăți

Fie x_0 un punct pe dreapta reală şi $\delta > 0$ un număr real.

Un interval care-l conține pe x_0 se numeşte *vecinătate* pentru x_0. Intervalul $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ care este simetric relativ la x_0 se numeşte $\delta-$vecinătate pentru x_0.

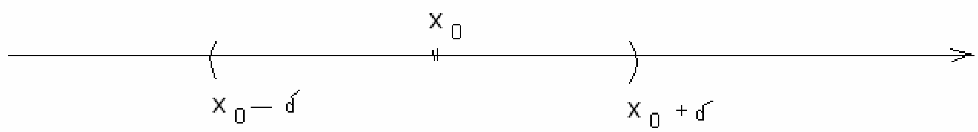


Figura 1.2 δ-vecinătate

$\delta-$vecinătatea lui x_0 este mulțimea numerelor reale x care satisfac inegalitatea $|x-x_0|<\delta$ sau echivalent $x_0-\delta<x<x_0+\delta$.

Mulțimi mărginite şi nemărginite

Fie E o mulțime de numere reale. Mulțimea E se numeşte:

a) *mărginită superior* dacă există un număr b astfel încât $x \le b, \forall x \in E$
b) *mărginită inferior* dacă există un număr a astfel încât $a \le x, \forall x \in E$
c) *mărginită* dacă E este mărginită superior şi inferior, adică dacă există a şi b astfel încât $a \le x \le b, \forall x \in E$. Mai mult, mulțimea E este mărginită dacă E este conținută în intervalul închis $[a,b]$.

Exemple:

$E=(-\infty,1]$ este mărginită superior
$\mathbb{N}$ mulțimea numerelor naturale este mărginită inferior

O mulțime care nu este mărginită superior (inferior) se numeşte *nemărginită superior* (*inferior*) .

Exemplu: $\mathbb{N}$ este nemărginită superior.

Supremum şi Infimum

Fie E o mulțime de numere reale mărginită superior, adică există un număr b astfel încât $x \le b, \forall x \in E$. Numărul b se numeşte *majorant* pentru *E*. Orice număr mai mare decât b este şi el majorant pentru *E*.

Definiție:
Numărul *M* se numeşte *supremum* pentru *E* dacă au loc:

(i) $\forall x \in E, x \leq M$

(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, oricât de mic, există un număr $x^* \in E$ astfel încât $M - \varepsilon < x^* \leq M$.

Cu alte cuvinte, supremum pentru mulțimea *E* este cel mai mic majorant al mulțimii *E*. Notăm $M = \sup E$. Dacă *E* este nemărginită superior, $\sup E = +\infty$.

Fie *E* o mulțime de numere reale mărginită inferior, adică există un număr *a* astfel încât $a \leq x, \forall x \in E$. Numărul *a* se numeşte *minorant* pentru *E*. Orice număr mai mic decât *a* este şi el minorant pentru *E*.

Definiție:
Numărul *m* se numeşte *infimum* pentru *E* dacă au loc:

(i) $\forall x \in E, x \geq m$

(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, oricât de mic, există un număr $x^* \in E$ astfel încât $m \leq x^* < m + \varepsilon$.

Cu alte cuvinte, infimum pentru mulțimea *E* este cel mai mare minorant al mulțimii *E*. Notăm $m = \inf E$. Dacă *E* este nemărginită inferior, $\inf E = -\infty$.

Exemple: $E = [a,b] \Rightarrow \quad \inf E = a \quad \sup E = b$
$E = (a,b) \Rightarrow \quad \inf E = a \quad \sup E = b$

Observație: Supremum şi infimum aparțin mulțimii în primul exemplu şi nu aparțin mulțimii în al doilea exemplu.

Exemplu:

$$E = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\} \qquad \inf E = 0 \qquad \sup E = 1$$

Teoremă: Orice mulțime nevidă de numere reale care este mărginită superior are supremum şi orice mulțime nevidă de numere reale care este mărginită inferior are infimum.

Fie o lege de corespondenţă care asociază la fiecare număr natural $n = 1,2,\dots$ un număr real a_n. In acest mod am definit un şir de numere reale $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sau pe scurt un şir $\{a_n\}$. Numerele $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ se numesc termenii şirului.

Exemple:

(i) $\{n\} = 1,2,3,\dots,n,\dots$

(ii) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\} = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots, \dfrac{1}{n}, \dots$

(iii) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\} = -1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dots, \dfrac{(-1)^n}{n}, \dots$

(iv) $\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\} = 0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dots, \dfrac{n-1}{n}, \dots$ (29)

Definiţie: Un număr A se numeşte limita şirului $\{a_n\}$ dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr natural N (dependent de ε) astfel încât inegalitatea

$$|a_n - A| < \varepsilon \tag{30}$$

are loc pentru $\forall n > N$.

Notaţie: $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ sau $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$ şi spunem că şirul $\{a_n\}$ converge la A.

Folosind simboluri logice putem rescrie definiţia limitei astfel:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon \tag{31}$$

Noțiunea de limită este uşor de interpretat dacă aşezăm termenii şirului $\{a_n\}$ pe dreapta reală:

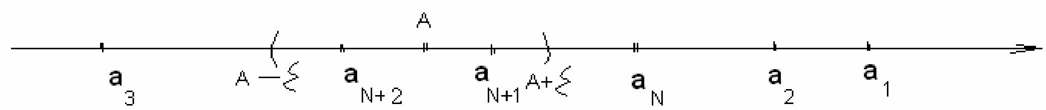


Figura 1.3 Interpretare geometrică pentru convergența şirului

Inegalitatea $|a_n - A| < \varepsilon$ este echivalentă cu inegalitățile $A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon$, adică termenii şirului se află în $\varepsilon-$vecinătatea lui *A*. Cu alte cuvinte, *A* este limita şirului $\{a_n\}$ dacă, pentru orice $\varepsilon-$vecinătate a lui A, există un număr natural *N* astfel încât toți termenii şirului a_n cu $n > N$ sunt conținuți în această orice $\varepsilon-$vecinătate a lui A, adică în intervalul deschis $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. De observat că numărul finit de termeni $a_1, a_2, \ldots, a_N$ se pot afla în afara intervalului $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$, aceştia necontând la stabilirea convergenței.

Şirul care are toți termenii egali cu numărul *A* se numeşte *şir staționar* şi are limita *A*.

Un şir se numeşte **convergent** dacă are limită finită şi este **divergent** în caz contrar.

Exemplu:

Fie şirul $\{a_n\}$ cu termenul $a_n = \dfrac{n+1}{n}$. Desigur, pentru valori mari ale lui *n* fracția se apropie de numărul unu.

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \tag{32}$$

Atunci putem presupune că

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \tag{33}$$

Pentru a demonstra această limită, considerăm un $\varepsilon > 0$ arbitrar şi arătăm că $\exists N$ astfel încât $\forall n > N$ să avem

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \tag{34}$$

Din inegalitatea $\frac{1}{n} < \varepsilon$ obținem $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Atunci, pentru orice număr natural N care excede pe $\frac{1}{\varepsilon}$ şi pentru toți $n > N$ are loc $\frac{1}{n} < \varepsilon$, adică relatia (34) este adevărată. Conform definiției limitei, avem $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Observație:
In general numărul N este dependent de ε, adică $N = N(\varepsilon)$. In exemplul precedent, dacă $\varepsilon = 0.1$, putem considera $N = 10$ sau cu orice număr mai mare decît 10. Dacă $\varepsilon = 0.01$, atunci $N = 100$ sau cu un număr mai mare decât 100.
Numărul N din definiția limitei nu este definit în mod unic de către ε, în sensul că dacă inegalitatea din definiție are loc pentru $n > N_1$ atunci ea are loc şi pentru toți $n > N_2$ cu $N_2 > N_1$. In demonstrarea convergenței unui şir este suficient să alegem un număr N astfel încât $|a_n - A| < \varepsilon$ pentru orice $n > N$. Nu este necesar să-l determinăm pe cel mai mic N care satisface această condiție.

Exerciții:

- □ Să se arate că şirul cu termenul general $a_n = \frac{n+1}{5n+2}$ are limita $\frac{1}{5}$.
- □ Să se arate că şirul cu termenul general $a_n = \frac{n^2}{2n^2+2}$ are limita $\frac{1}{2}$. Să se determine rangurile de la care începând toți termenii şirului diferă de $\frac{1}{2}$ cu mai puțin de $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}$.
- □ Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^3+1} = 0$
- □ Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (-2)^n}{3^n} = 0$

Teorema 1 (*Criteriul de convergență Cauchy*)
Pentru ca şirul $\{a_n\}$ să fie convergent este necesar şi suficient ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe numărul natural N astfel încât $\forall n > N$, $\forall m > N$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad (35)$$

Un şir care satisface enunțul acestei teoreme se numeşte *şir Cauchy*.

Altă formulare pentru criteriul Cauchy:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon)$ a.i. $\forall n > N,\ \forall p \in \mathbb{N}$ avem $\left| a_{n+p} - a_n \right| < \varepsilon$

Exerciții:

- Să se demonstreze convergența pentru șirurile:

$$a_n = \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 2x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{3^n}$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

- Să se arate că șirul următor este divergent:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Teorema 2 (*Unicitatea limitei*)

Un șir $\{a_n\}$ nu poate avea două limite distincte.

Demonstrație: Fie A o limită a șirului $\{a_n\}$ și fie $B \neq A$. Pentru a demonstra că B nu poate fi limită pentru $\{a_n\}$, considerăm un ε atât de mic încât $\varepsilon -$vecinătatea lui A și $\varepsilon -$vecinătatea lui B să nu se intersecteze. De exemplu, putem considera $\varepsilon = |B - A|/3$.

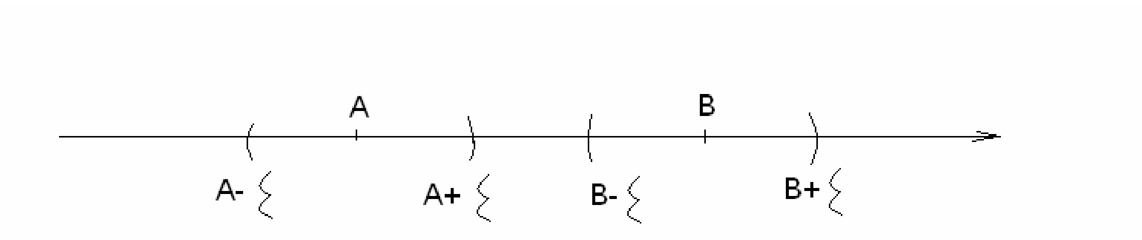


Figura 1.4 unicitatea limitei

Deoarece $A = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$, doar un număr finit de termeni a_n se pot afla în afara intervalului deschis $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Atunci, intervalul deschis $(B - \varepsilon, B + \varepsilon)$ conține cel mult un număr finit de termeni a_n și deci B nu poate să fie limită pentru șirul $\{a_n\}$.

Şiruri mărginite

Un şir $\{a_n\}$ se numeşte:

a) *mărginit superior* dacă există un număr *M* astfel încât $a_n \le M$, $\forall n$.

b) *mărginit inferior* dacă există un număr *m* astfel încât $a_n \ge m$, $\forall n$.

c) *mărginit* dacă $\{a_n\}$ este mărginit superior şi inferior, adică dacă există numerele *m* şi *M* astfel încât $m \le a_n \le M$ pentru $\forall n$.

Observaţie: Toţi termenii unui şir mărginit sunt conţinuţi în intervalul închis $[m, M]$ de pe dreapta reală.

Exemple: Şirul $\{n\} = 1,2,3,\ldots,n,\ldots$ este mărginit inferior

Şirul $\{a_n\}$ cu $a_n = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$ este mărginit deoarece $1 \le a_n \le 2$, $\forall n$.

Altă definiţie a mărginirii: un şir $\{a_n\}$este *mărginit* dacă există un număr $K > 0$ astfel încât

$$|a_n| \le K, \quad \forall n \tag{36}$$

Folosind simboluri logice putem rescrie această definiţie:

$$\{a_n\}\text{mărginit} \Leftrightarrow \exists K > 0,\ \forall n\ \ |a_n| \le K$$
$$\{a_n\}\text{nemărginit} \Leftrightarrow \forall K > 0,\ \exists n\ \ |a_n| > K$$

Exemplu:

Arătaţi că şirul $\{2^n\}$ este nemărginit.

Intr-adevăr, pentru $\forall K > 0$, $\exists n$ astfel încât $2^n > K$, adică $n > \log_2 K$. Atunci, şirul $\{2^n\}$ este nemărginit.

Definiţie: Un şir se numeşte *divergent* la ∞ şi scriem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ dacă, pentru orice $M > 0$, oricât de mare, există un număr $N = N(M)$ astfel încât:

$$|a_n| > M, \quad \forall n > N$$

Un şir $\{a_n\}$ astfel încât $\forall M > 0$, $\exists N \quad \forall n > N$, $a_n > M \quad (a_n < -M)$ este divergent la $+\infty$ (sau la $-\infty$). In aceste situații scriem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad (\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty)$$

Teorema 3: Orice şir $\{a_n\}$ convergent este mărginit, adică există numerele *m* şi *M* astfel încât

$$m \le a_n \le M, \qquad \forall n$$

Demonstrație: Fie $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ şi fie $\varepsilon > 0$ un număr arbitrar. Atunci există *N* astfel încât intervalul deschis $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ să conțină toți termenii a_n cu $n > N$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_N$ sunt singurii termeni ai şirului ce se pot afla în exteriorul intervalului :

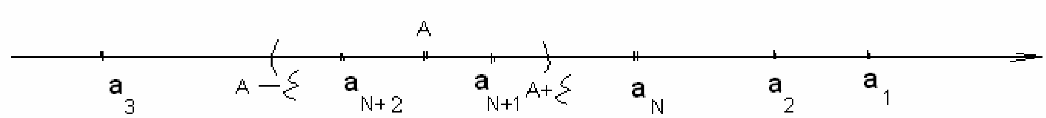


Figura 1.5 Dispunerea termenilor şirului convergent

Astfel, în exteriorul intervalului există doar un număr finit de termeni şi alegem $\tilde{a}$ ca fiind egal cu cel mai mic dintre aceştia, iar $\hat{a}$ cu cel mai mare dintre aceştia. Considerăm:

$$m = \min\{\tilde{a}, A-\varepsilon\}$$
$$M = \max\{\hat{a}, A+\varepsilon\}$$

Atunci, intervalul închis $[m, M]$ conține termenii $a_1, a_2, \ldots, a_N$ şi intervalul deschis $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. Deoarece toți termenii şirului a_n cu $n > N$ sunt în intervalul $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$, atunci intervalul închis $[m, M]$ conține toți termenii şirului $\{a_n\}$. Rezultă că şirul este mărginit.

Observație: Teorema 3 spune că mărginirea este o condiție necesară pentru convergență, însă aceasta nu este şi suficientă.

Exemplu: Şirul

$$1,0,1,0,1,\ldots \tag{37}$$

este mărginit dar nu este convergent.

Pentru a arăta că şirul dat este divergent presupunem contrariul, adică şirul (37) are limita A. Atunci pentru orice ε, de exemplu $\varepsilon = 1/4$, există N astfel încât

$$|a_n - A| < \frac{1}{4}, \qquad \forall n > N$$

Adică trebuie să aibă loc

$$|0 - A| = |A| < \frac{1}{4} \qquad \text{şi} \qquad |1 - A| < \frac{1}{4} \qquad \forall n > N$$

$$\Rightarrow \qquad 1 = |1 - A + A| \le |1 - A| + |A| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{absurd}$$

Presupunerea noastră de convergenţă este falsă. Şirul este divergent.

Operaţii cu şiruri convergente

Teorema 4: Fie $\{a_n\}$ şi $\{b_n\}$ două şiruri convergente la A şi B respectiv, adică

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = B$$

Atunci următoarele limite există:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B \tag{38}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = A - B$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B} \quad \text{dacă } b_n \ne 0 \text{ pentru orice } n \text{ şi } \lim_{n\to\infty} b_n \ne 0 .$$

Demonstrăm doar prima operaţie cu limite de şiruri.

Demonstrație: Fie $\varepsilon > 0$ un număr arbitrar. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,

$$\exists N_1 \text{ astfel încât } |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N_1 \tag{39}$$

Similar, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

$$\exists N_2 \text{ astfel încât } |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N_2 \tag{40}$$

Considerăm $N = \max\{N_1, N_2\}$. Atunci pentru $\forall n > N$ are loc:

$$\left|(a_n + b_n) - (A + B)\right| = \left|(a_n - A) + (b_n - B)\right| \le |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Astfel,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \text{ a.î. } \forall n > N \;\Rightarrow \left|(a_n + b_n) - (A + B)\right| < \varepsilon$$

Cu definiția limitei, rezultă că $A + B$ este limita şirului $\{a_n + b_n\}$.

Regula cleştelui: Fie $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ şi $\{c_n\}$ trei şiruri de numere reale care verifică inegalitățile:

$$a_n \le b_n \le c_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Dacă $\{a_n\}$ şi $\{c_n\}$ sunt convergente la acelaşi număr *A*, atunci şi $\{b_n\}$ este convergent la aceeaşi limită *A*.

Exerciții:

- □ Fie şirul:

$$a_n = \frac{\alpha_0 n^k + \alpha_1 n^{k-1} + \ldots + \alpha_k}{\beta_0 n^p + \beta_1 n^{p-1} + \ldots + \beta_p}$$

Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, & k < p \\ \dfrac{\alpha_0}{\beta_0}, & k = p \\ \infty, & k > p \end{cases}$

- □ Calculați: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2}$

□ Să se arate că $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n!}=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$

□ Calculați limitele şirurilor cu termenul general:

$$a_n=\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \qquad a_n=\frac{3^n+5^n}{3^{n+1}+5^{n+1}}$$

Şiruri monotone

Un şir $\{a_n\}$ se numeşte:

a) crescător dacă $a_1\le a_2\le\ldots\le a_n\le a_{n+1}\le\ldots$.

b) descrescător dacă $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n\ge a_{n+1}\ge\ldots$.

c) monoton dacă $\{a_n\}$ este fie crescător fie descrescător.

Un şir $\{a_n\}$ crescător este *mărginit* dacă este mărginit superior, adică dacă există un număr M a.î. $a_n\le M$, $\forall n$ şi toți termenii şirului sunt conținuți în intervalul închis $[a_1,M]$.

Un şir $\{a_n\}$ descrescător este *mărginit* dacă este mărginit inferior, adică dacă există un număr *m* a.î. $a_n\ge m$, $\forall n$ şi toți termenii şirului sunt conținuți în intervalul închis $[m,a_1]$.

Teorema 5: Orice şir monoton şi mărginit are limită.

Demonstrație:

Deoarece şirul $\{a_n\}$ este mărginit, termenii şirului formează o mulțime care are supremum şi infimum. Fie M supremum pentru mulțime şi arătăm că $\lim_{n\to\infty}a_n=M$ cu condiția ca şirul să fie crescător.

Din definiția lui supremum pentru $\forall\varepsilon>0$ există a_N a.î.

$$M-\varepsilon<a_N\le M$$

$$0\le M-a_N<\varepsilon$$

Deoarece s-a presupus $\{a_n\}$ crescător avem

$$0\le M-a_n\le M-a_N<\varepsilon,\quad \forall n>N$$

$$0 \le M - a_n < \varepsilon, \qquad \forall n > N$$

$$\left| a_n - M \right| < \varepsilon, \qquad \forall n > N$$

Ceea ce stabileşte că *M* este limita şirului $\{a_n\}$.
In mod asemănător se poate arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = m$ cu condiția ca $\{a_n\}$ să fie descrescător şi mărginit şi *m* să fie infimum pentru mulțimea termenilor.

Observație: Pentru ca un şir să fie convergent nu este necesar ca şirul să fie monoton.

Exemplu:
Şirul $\left\{ \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$ nu este monoton dar converge la zero.

Lema Cantor

Fie şirul de intervale închise

$$\sigma_n = [a_n, b_n], \qquad n = 1, 2, \ldots$$

a.î. $\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$, $n = 1, 2, \ldots$ şi $d_n = b_n - a_n \to 0$ pentru $n \to \infty$. Atunci există un singur punct care aparține la toate intervalele σ_n.

Lema Cantor se referă la proprietatea numerelor reale de a umple dreapta reală fără a lăsa goluri pe aceasta.

1.4 Funcții de o variabilă. Definiții

Funcția este un obiect matematic care determină şi este complet determinat de următoarele elemente:

X o mulțime de numere reale x şi o lege, o regulă care asociază la fiecare număr $x \in X$ un număr real y. In acest fel că am definit o funcție pe X şi scriem

$$y = f(x) \quad \text{sau} \quad y = y(x), \ \ x \in X \qquad (1)$$

Mulțimea X se numeşte *domeniu de definiție* al funcției, iar mulțimea Y a valorilor y pe care le ia funcția, se numeşte *domeniu de valori* sau *codomeniu.* Domeniul de definiție se notează şi cu $D(f)$.

O funcție este **bine definită** dacă sunt date:

(i) domeniul de definiție X
(ii) o regulă care asociază la fiecare $x \in X$ o valoare bine determinată $y = f(x)$.

Două funcții f şi g sunt *egale* dacă $D(f) = D(g)$ şi identitatea $f(x) = g(x)$ rămâne adevărată pentru toți $x \in D(f) = D(g)$.

Exemple de funcții:

a) un şir $\{a_n\}$ este o funcție definită pe mulțimea numerelor naturale $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, astfel

$$f(n) = a_n, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

b) $$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Domeniul de definiție: $(-\infty, +\infty)$
Domeniul de valori: $\{-1, 0, +1\}$

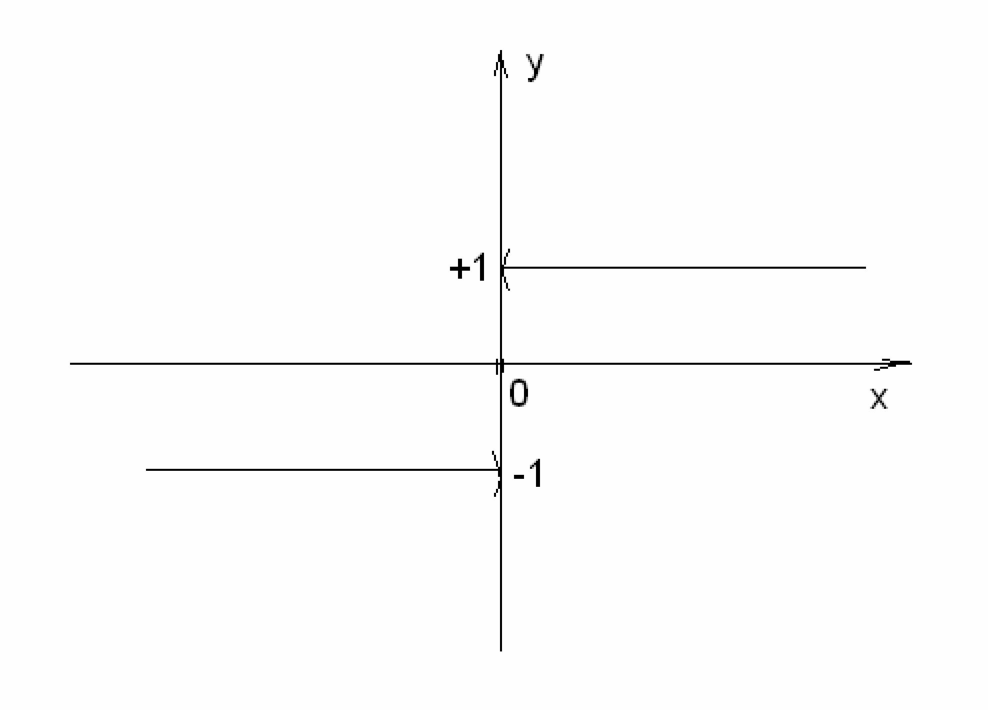


Figura 1.5 $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$

c) $y = [x]$ unde x este un număr real şi $[x]$ este cel mai mare întreg care nu-l excede pe x. Domeniul de definiţie: $\mathbb{R}$
Domeniul de valori: $\mathbb{Z}$

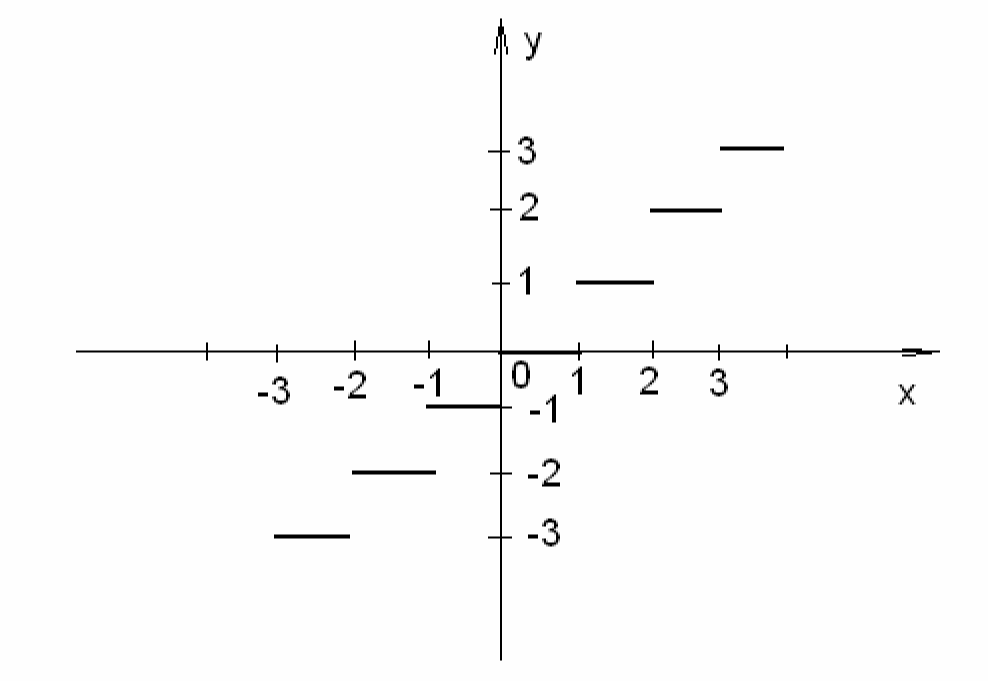


Figura 1.6 $f(x) = [x]$

Reprezentări pentru funcții

O funcție poate fi specificată printr-o formulă, printr-un grafic sau printr-un tabel. Respectiv, vom vorbi despre o reprezentare analitică, grafică sau tabelară.

a) *reprezentarea analitică* O funcție $y = f(x)$ este reprezentată analitic dacă este definită printr-o formulă care specifică la ce operații trebuie supus fiecare $x \in D(f)$ pentru a obține valoarea funcției în acel punct, notată cu *y*.
De exemplu, funcțiile

$$y = \frac{x}{x^2+1} \qquad \text{pentru } x \in (-\infty, +\infty)$$

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad \text{pentru } x \in [-1, +1]$$

sunt reprezentate analitic.

Observație: Nu orice formulă definește o funcție. De exemplu:

$$y = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-4}$$

nu defineşte o funcție deoarece pentru orice număr real *x* cel puțin un radical nu are valori reale.

O funcție poate fi definită prin formule diferite pe porțiuni diferite ale domeniului de definiție.
De exemplu, presupunem că un tren pleacă din stația *A* la momentul $t = 0$ şi parcurge timp de *2h,* cu viteza *100km/h* , distanța până la stația *B*, unde staționează o oră. Apoi, parcurge o altă distanță timp de *3h*, cu viteza *80km/h*. Funcția $s = f(t)$ care exprimă poziția trenului, măsurată în kilometri, față de stația *A*, la momentul *t,* este definită pe porțiuni cu trei formule distincte:

$$f(t) = \begin{cases} 100t, & t \in [0,2] \\ 200, & t \in (2,3] \\ 200 + 80t, & t \in (3,6] \end{cases} \qquad (3)$$

b) *reprezentarea grafică* Graficul unei funcții $y = f(x)$ se obține desenând punctele cu coordonatele (x, y) unde *x* trebuie să fie în domeniul de definiție a lui *f* şi $y = f(x)$.

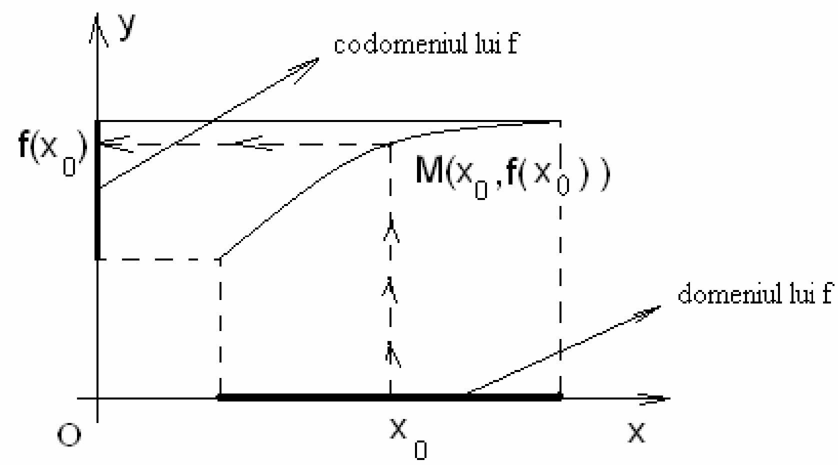


Figura 1.7

Spunem că o funcție are reprezentare grafică dacă este specificată prin graficul ei.

Observație: Nu toate funcțiile pot fi reprezentate grafic. De exemplu, funcția Dirichlet

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases} \tag{4}$$

nu admite reprezentare grafică.

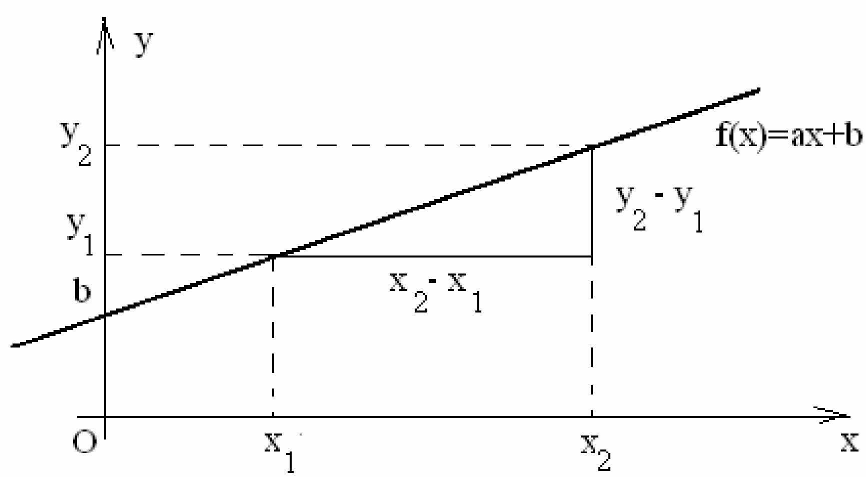


Figura 1.8 $f(x)=ax+b$

Caz particular: Funcția liniară este o funcție definită analitic de formula:

$$f(x)=ax+b$$

în care a şi b sunt constante. Graficul acestei funcţii este o dreaptă. Constantele a şi b sunt panta dreptei şi intersecţia cu axa *Oy* (ordonata). Reciproc, orice dreaptă care nu este verticală (paralelă cu axa *Oy*) este graficul unei funcţii liniare. Dacă cunoaştem două puncte de pe dreaptă (x_1, y_1) şi (x_2, y_2), atunci putem calcula panta dreptei:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

c)reprezentare tabelară O funcţie poate fi specificată printr-un tabel. De exemplu, dacă măsurăm temperatura aerului la fiecare oră, timp de 24 de ore, atunci fiecărui moment de timp $t = 0,1,2,\ldots,24$ îi corespunde un număr *T*.

t	0	1	2	...
T	T_0	T_1	T_2	...

Notăm funcţia astfel obţinută $T = f(t)$.

Exerciţii:

Să se stabilească domeniul maxim de definiţie al funcţiilor:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 2}} \qquad\qquad f(x) = \lg\left[\lg(3 - x) - 1\right]$$

1.5 Limita unei funcţii într-un punct

Conceptul de limită este fundamental în analiza matematică. Limita unei funcţii într-un punct este o generalizare a limitei unui şir de numere. In esenţă, funcţia *f* are limita *A* în punctul x_0, dacă pentru orice punct *x* suficient de apropiat de x_0, imaginea lui *x* prin funcţia *f*, este suficient de apropiată de *A*. Cu alte notaţii:

$$f(x) \to A \quad \text{atunci când } x \to x_0$$

Exmplu:
Dacă $f(x) = x + 3$, atunci $\lim_{x \to 4} f(x) = 7$, deoarece dacă înlocuim numere apropiate de 4 în funcție, atunci $f(x)$ va fi aproape de 7.

În cele ce urmează vom da definiția riguroasă a limitei unei funcții într-un punct. Aceasta e greu de digerat, dar după exemple va deveni mai umană.

Definiție: (Cauchy) Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0, cu o posibilă excepție în x_0. Atunci, un număr *A* este limita funcției $f(x)$ în punctul x_0, dacă pentru $\forall \varepsilon > 0$, oricât de mic, $\exists \delta > 0$ (dependent de ε) astfel încât

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{5}$$

pentru toți *x* cu $|x - x_0| < \delta$ și $x \neq x_0$.

Notație: $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$

Cu simboluri logice , definiția limitei poate fi rescrisă:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0, \quad \forall x, x \neq x_0, \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

Observații:

- În definiția dată apare valoarea absolută, deoarece $|x - y|$ înseamnă distanța dintre punctele *x* și *y* pe dreapta reală. $|x - x_0| < \delta$ înseamnă că distanța dintre *x* și x_0 este mai mică decât δ.
- Ce sunt ε și δ în această definiție? Cantitatea ε ne spune cât de aproape vrem să fie $f(x)$ de limita *A*, iar cantitatea δ ne spune cât de aproape de x_0 trebuie să-l alegem pe *x* ca să obținem acest lucru. Ca să demonstrăm că $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, alegem ε și-l determinăm pe δ.

Exemplu:

$$f(x) = 2x + 3 \qquad x_0 = 1 \qquad \lim_{x \to 1} f(x) = 5$$

Intr-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ un număr arbitrar. Inegalitatea din definiție este

$$|(2x+3)-5| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |2x-2| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 2|x-1| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Considerăm $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$ şi avem $|x-1| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-5| < \varepsilon$. Asfel, conform definiției, numărul 5 este limita funcției $f(x) = 2x+3$ în punctul $x_0 = 1$**.** Pentru orice $\varepsilon > 0$, avem $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$ care pentru $|x-1| < \delta$ ne garantează $|(2x+3)-5| < \varepsilon$.

Interpretare geometrică pentru limita unei funcții într-un punct:

Fie o funcție $f(x)$ specificată printr-un grafic, astfel încât valorile lui $f(x)$ sunt egale cu ordonatele punctelor curbei M_1M pentru $x < x_0$ şi cu ordonatele punctelor curbei MM_2 pentru $x > x_0$. Fie $f(x_0)$ egal cu ordonata punctului *N*.

Presupunem graficul lui $f(x)$ obținut din curba *bună* M_1MM_2, înlocuind punctul *M* cu *N*.

Vom arăta că funcția $f(x)$ are limita în punctul x_0 egală cu numărul *A*, ordonata punctului *M*.

Intr-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ un număr arbitrar, oricât de mic, şi fixăm punctele $A-\varepsilon$, A, $A+\varepsilon$ pe axa *y*. Fie *P* şi *Q* punctele de intersecție ale graficului lui $f(x)$ cu dreptele $y = A-\varepsilon$ şi $y = A+\varepsilon$ şi fie $x_0 - h_1$ şi $x_0 + h_2$ ($h_1 > 0, h_2 > 0$) abscisele punctelor *P* şi *Q*.

Pentru orice $x \neq x_0$ din intervalul $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ valoarea funcției $f(x)$ se află între $A-\varepsilon$ şi $A+\varepsilon$, adică

$$A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$$

Fie $\delta = \min\{h_1, h_2\}$. Atunci, intervalul $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ este conținut în $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$.

In concluzie, inegalitatea $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$, echivalentă cu $|f(x)-A| < \varepsilon$ este garantată $\forall x, x \neq x_0$ din intervalul $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, adică $\forall x$ care verifică condiția $0 < |x-x_0| < \delta$. Conform definiției,

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Remarcă: Funcția $y = f(x)$ are limita A în punctul x_0 dacă pentru orice bandă, oricât de îngustă, dintre dreptele $y = A - \varepsilon$ şi $y = A + \varepsilon$, există $\delta > 0$ astfel încât graficul lui $y = f(x)$ se află în bandă pentru orice $x \neq x_0$ din $\delta -$vecinătatea lui x_0.

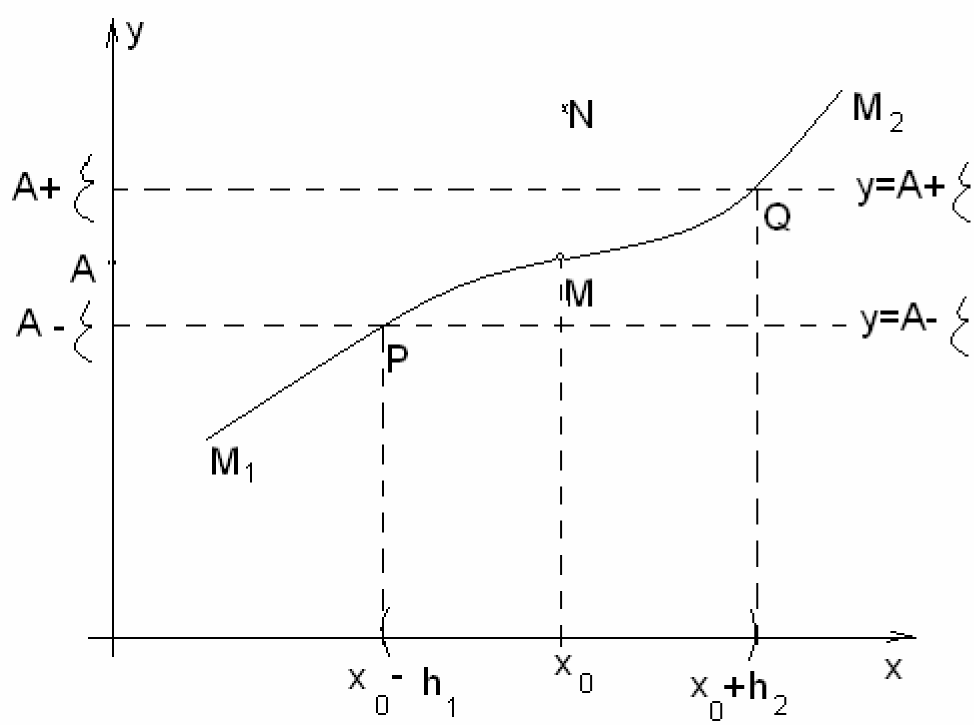


Figura 1.9

Exerciții: Folosind definiția limitei într-un punct, să se demonstreze că:

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \qquad\qquad \lim_{x \to \frac{5}{2}} (2x + 1) = 6$$

Alt exemplu:

$$f(x) = x^2 \qquad x_0 = 1 \qquad \lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) = ?, \quad \forall x, x \neq 1, \quad |x - 1| < \delta \;\Rightarrow\; |x^2 - 1| < \varepsilon$$

În demonstrarea acestei limite, se pune problema cât de mic trebuie să fie $|x-1|$ pentru a garanta $|x^2-1|<\varepsilon$. Începem cu estimarea diferenței $|x^2-1|$:

$$|x^2-1| = |(x-1)(x+1)| = |x-1|\cdot|x+1|$$

Pe măsură ce x se apropie de 1, factorul $|x-1|$ devine mic, şi dacă factorul $|x+1|$ ar fi o constantă (de exemplu 2 ca în exemplul precedent), atunci am putea determina pe δ ca mai înainte, prin împărțirea lui ε cu constanta.

Printr-un truc putem înlocui factorul $|x+1|$ cu o constantă. Anume, totdeauna alegem pe δ astfel încât $\delta \le 1$. Dacă facem asta, atunci vom avea:

$$|x-1| < \delta \le 1,\ \text{ adică } \ |x-1| < 1$$

iar $0 < x < 2$. Atunci,

$$|x^2-1| = |x-1|\cdot|x+1| < 3|x-1|$$

Dacă vrem să fim siguri că $|x^2-1|<\varepsilon$, atunci acest calcul arată că ar trebui ca $3|x-1|<\varepsilon$, adică

$$|x-1| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

Astfel ar trebui să alegem $\delta \le \frac{1}{3}\varepsilon$. Şi să nu uităm să alegem un $\delta \le 1$. Dacă am considerat un ε pentru care $\frac{1}{3}\varepsilon > 1$, atunci alegem $\delta = 1$ în loc de $\delta = \frac{1}{3}\varepsilon$. În concluzie, vom alege:

$$\delta = \min\left(1, \frac{1}{3}\varepsilon\right)$$

Am arătat astfel că dacă alegem δ în acest mod, atunci $|x-1|<\delta$ garantează $|x^2-1|<\varepsilon$, pentru orice alegere a lui ε.

Observații:

1) In general, valoarea lui δ depinde de ε, adică $\delta = \delta(\varepsilon)$.

2) Atunci când determinăm limita unei funcții într-un punct x_0 nu ținem cont de ce se întâmplă în punctul x_0.

Limita funcției $f(x)$ în punctul x_0 este independentă de valoarea funcției în punctul x_0. Mai mult, funcția poate să nu fie definită în x_0.

Orice două funcții egale pe o vecinătate a lui x_0, cu o posibilă excepție în x_0, unde acestea pot fi diferite sau chiar nedefinite, au aceeaşi limită pentru $x \to x_0$ sau nu au limită.

Numărul limită A furnizează informații despre comportarea funcției într-o vecinătate a punctului x_0.

Exemple:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}$

$f(x)=\frac{x}{x}=1$, $\forall x \neq 0$ şi nu este definită în $x=0$

Din definiția limitei funcției în punctul $x=0$, punctul $x=0$ este exclus.

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}1=1$$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$, $\forall x \neq 2$ şi nu este definită în $x=2$

Din definiția limitei funcției în punctul $x=2$, punctul $x=2$ este exclus.

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ unde, $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

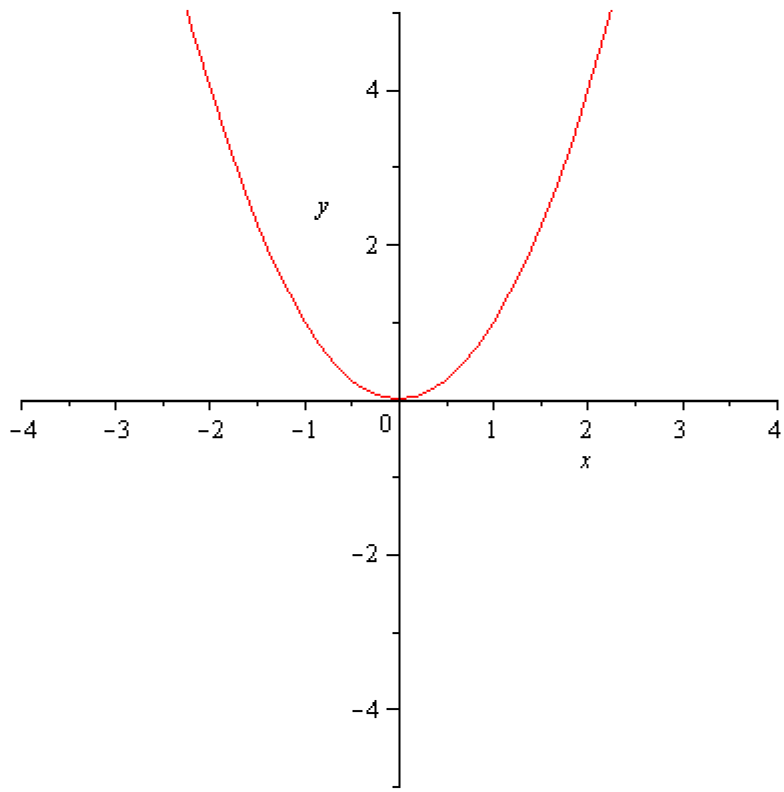


Figura 1.10

Funcția $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ este egală cu $f(x)$ peste tot, mai puțin în $x = 0$ şi $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

Definiție: (cu şiruri) Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0, cu o posibilă excepție în x_0. Şi fie $\{x_n\}$ cu $x_n \in \Omega$ şi $x_n \neq x_0$, un şir de numere convergent la x_0. Atunci, un număr A este limita funcției $f(x)$ în punctul x_0 dacă pentru orice şir $\{x_n\} \to x_0$, şirul corespunzător imagine $\{f(x_n)\}$ converge la A.

Exemplu: $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ definită pe $\mathbb{R} - \{0\}$

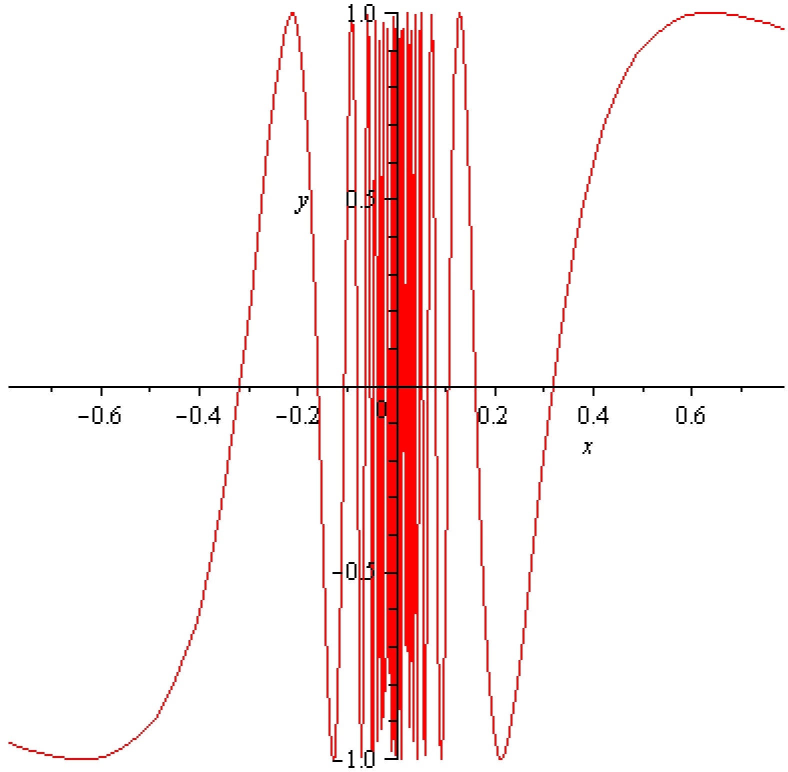


Figura 1.11 $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad\qquad f(x_n)=\sin n\pi = 0$$

$$x'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad\qquad f(x'_n)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1$$

Am considerat două şiruri $\{x_n\}$ şi $\{x'_n\}$ convergente la $x_0=0$ pentru care şirurile corespunzătoare imagine au limite diferite $\{f(x_n)\}\to 0$ şi $\{f(x'_n)\}\to 1$. Conform definiției cu şiruri, rezultă că funcția nu are limită în $x_0=0$.

Teorema 1: Fie $f(x)$ o funcție care are limită în punctul x_0. Atunci limita este unică.

Definiție: O funcție $f(x)$ este *mărginită* pe o vecinătate a unui punct x_0 dacă există numerele $M>0$ şi $\delta>0$ astfel încât

$$|f(x)|\le M\,, \quad \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta) \tag{6}$$

vecinătate îpecare funcția este definită.

Teorema 2: Fie $f(x)$ o funcție care are limită finită în x_0. Atunci, $f(x)$ este mărginită pe o vecinătate a lui x_0, adică $\exists M > 0$ şi $\exists \delta > 0$ astfel încât

$$|f(x)| \leq M\ , \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Demonstrație:

Fie $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0$ de exemplu $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0$ astfel încât

$$|f(x) - A| < 1 \quad \text{pentru } x \neq x_0 \text{ şi } |x - x_0| < \delta$$

Dar, $\quad 1 > |f(x) - A| \geq \big||f(x)| - |A|\big| \geq |f(x)| - |A| \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)| < |A| + 1$

Fie $M = |A| + 1$ dacă funcția nu este definită în x_0 şi fie $M = \max\{|A| + 1, |f(x_0)|\}$ dacă funcția este definită în x_0.

$$\Rightarrow \qquad |f(x)| \leq M\ , \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Observație: Conform teoremei 2, existența limitei finite a unei funcții implică mărginirea acesteia. Reciproca nu este totdeauna adevărată, adică o funcție poate să fie mărginită pe o vecinătate a lui x_0 dar să nu aibă limită în x_0. De exemplu, $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ este mărginită pe o vecinătate a lui $x_0 = 0$ deoarece $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ dar $f(x)$ nu are limită în $x_0 = 0$.

Limite şi inegalități

Urmează două teoreme care compară limitele a diferite funcții.

Teorema 3: Fie $f(x) \leq \varphi(x)$, $\forall x \in \Omega$, Ω o vecinătate a punctului x_0 , cu o excepție posibilă în x_0 şi presupunem că $f(x)$ şi $\varphi(x)$ au limită în x_0 . Atunci:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} \varphi(x)$$

Caz particular: $f(x)=0$ În acest caz teorema precedentă spune că dacă $\varphi(x)$ este pozitivă, atunci şi limita sa va fi pozitivă.

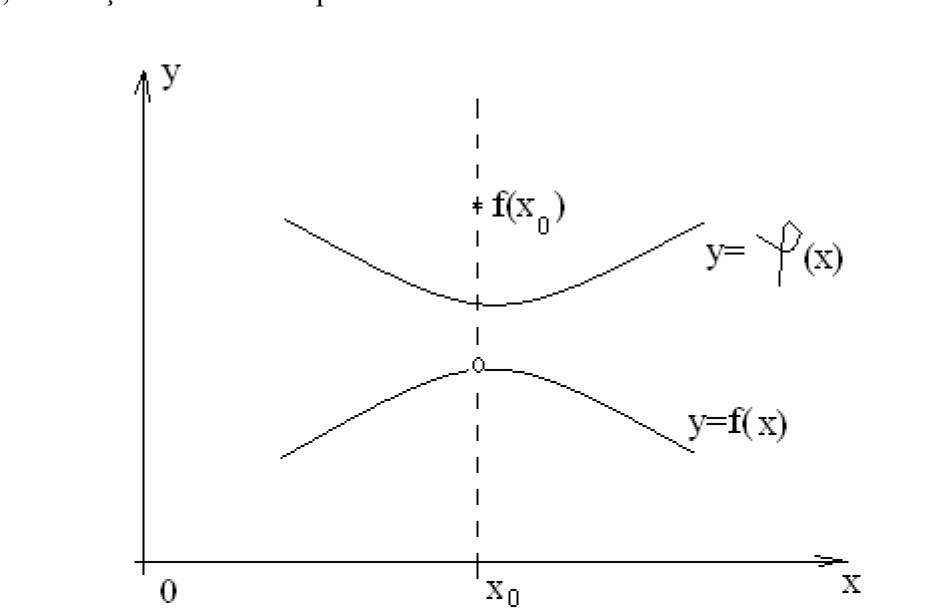


Figura 1.12

Teorema 4 (sandwich)**:** Fie $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, $\forall x \in \Omega$, Ω o vecinătate a punctului x_0, cu o excepţie posibilă în x_0 şi presupunem că $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ au limita A în x_0. Atunci şi $f(x)$ are limita A în x_0 .

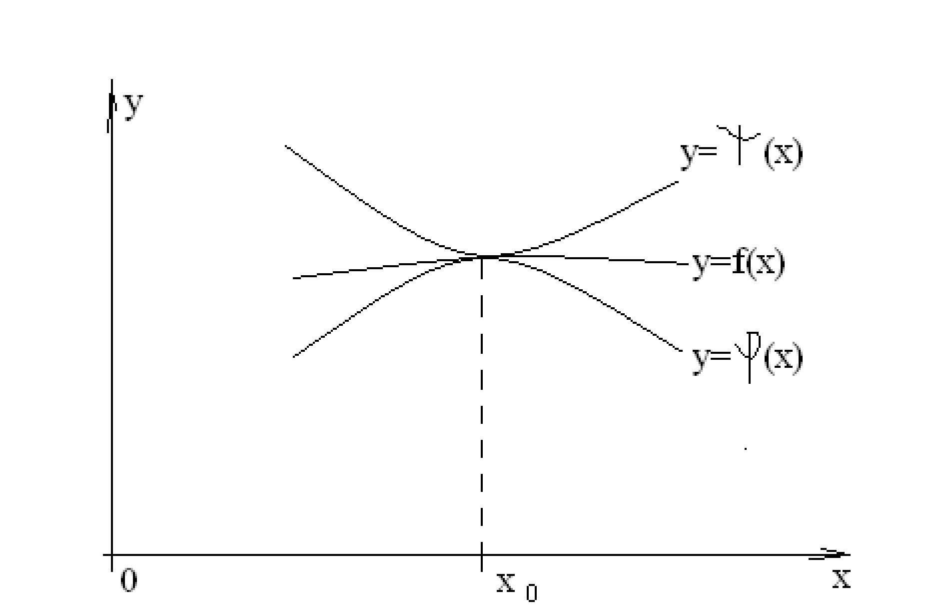


Figura 1.13

Exemplu:

$$\varphi(x) = -|x| \qquad f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \psi(x) = |x|$$

$$-|x| \le x\cos\frac{1}{x} \le |x|$$

$$\lim_{x\to 0}\left(-|x|\right) = \lim_{x\to 0}|x| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$$

Observație: Limita funcției $\cos\frac{1}{x}$ pentru $x \to 0$ nu există. Înmulțind funcția cu x situația se schimbă.

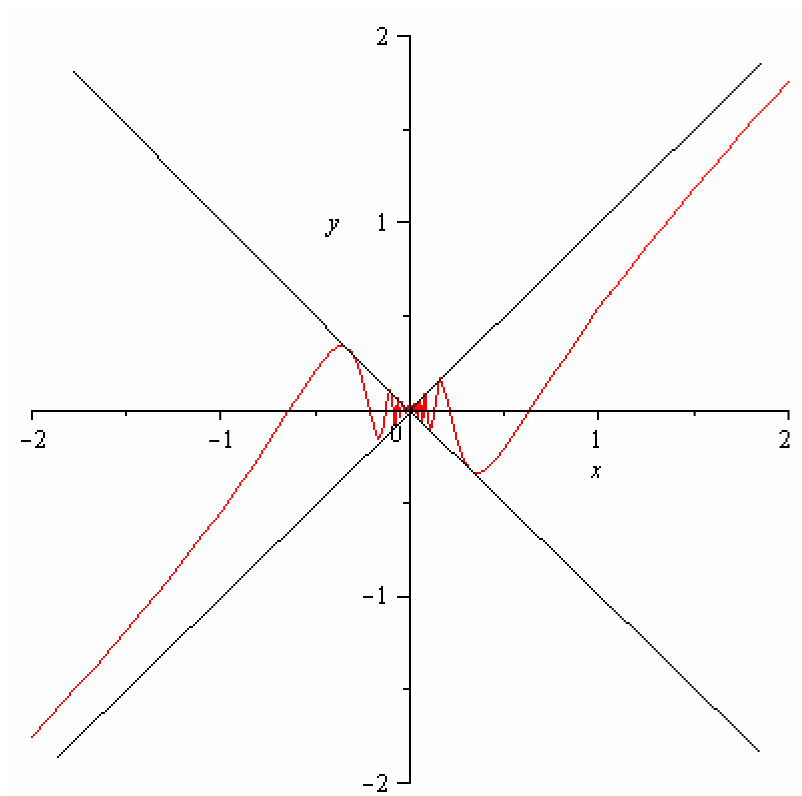


Figura 1.14 $f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

1.6 Limita unei funcții când variabila tinde la infinit

Fie $f(x)$ o funcție definită pe toată dreapta reală sau pentru x cu $|x| > K$ cu $K > 0$ astfel încât să putem calcula valorile funcției pentru x oricât de mare.

Definiție: Spunem că numărul A este limita funcției $f(x)$ când x tinde la infinit şi scriem

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

dacă $\forall\varepsilon > 0$ există un număr $N > 0$ a.î. $|f(x) - A| < \varepsilon$ pentru $\forall x$ cu $|x| > N$.

Cazuri particulare:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ a.î. } |f(x) - A| < \varepsilon, \forall x, x > N$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ a.î. } |f(x) - A| < \varepsilon, \forall x, x < -N$$

Interpretare geometrică: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$ înseamnă, fiind dată o bandă, oricât de îngustă, între dreptele $y = A - \varepsilon$ şi $y = A + \varepsilon$, există o dreaptă $x = N > 0$ a.î. pentru toți $x > N$ graficul lui $y = f(x)$ să fie conținut în bandă. Spunem că curba $y = f(x)$ tinde asimptotic la dreapta $y = A$ pentru $x \to +\infty$.

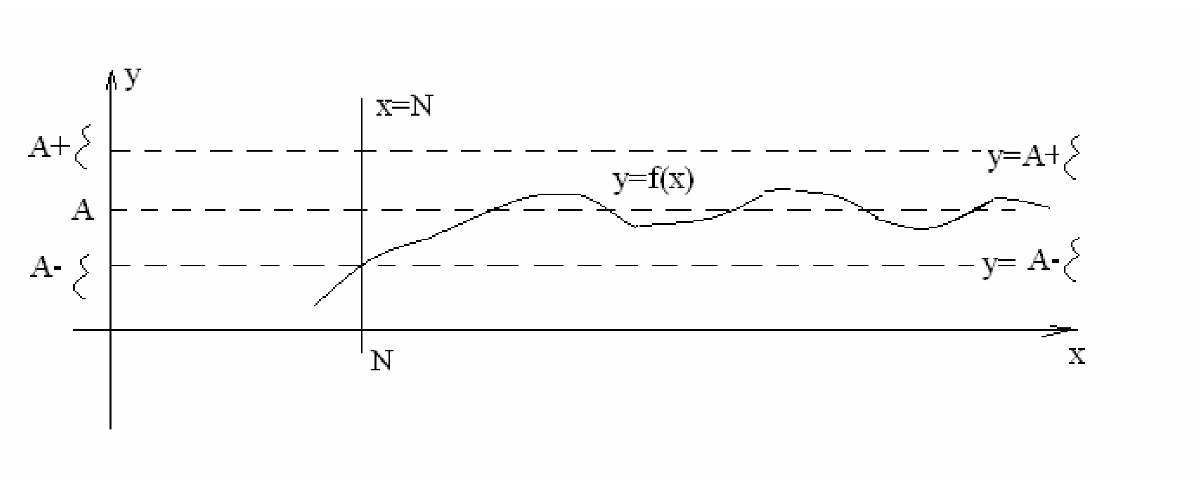


Figura 1.15

Exemplu:

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

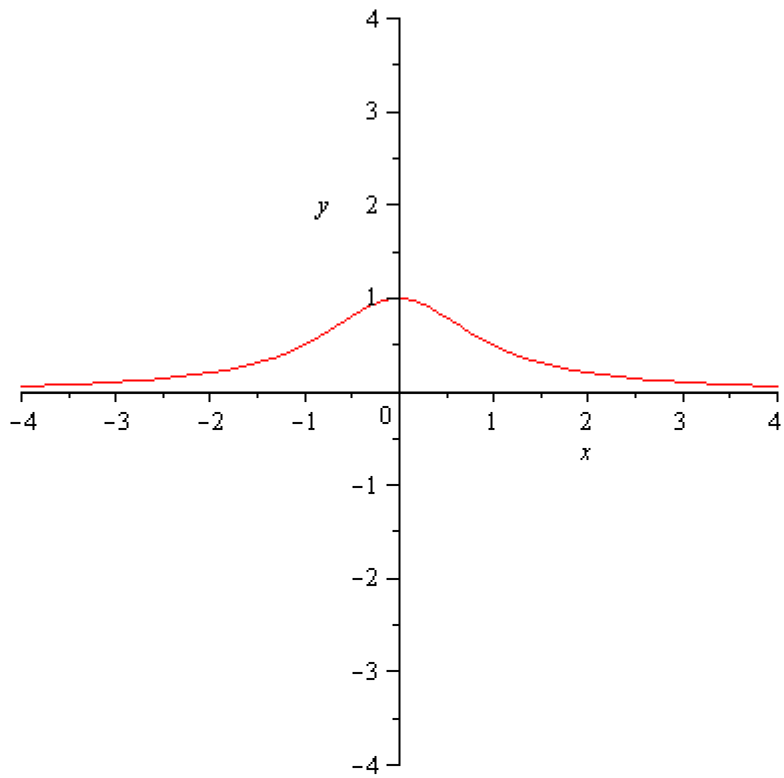


Figura 1.16 $\quad f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

Exerciții:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$$

Să se calculeze următoarele limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \qquad \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$$

1.7 Noțiunea de infinitezimal

Fie $\alpha(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0, cu o posibilă excepție în x_0.

Definiție: Funcția $\alpha(x)$ este o funcție *infinit mică* sau un *infinitezimal*, pentru $x \to x_0$ dacă $\alpha(x)$ are în punctul x_0 limita zero, adică $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Exemplu: $\alpha(x) = x - 1$ este un infinitezimal pentru $x \to 1$, deoarece $\lim\limits_{x \to 1}(x-1) = 0$

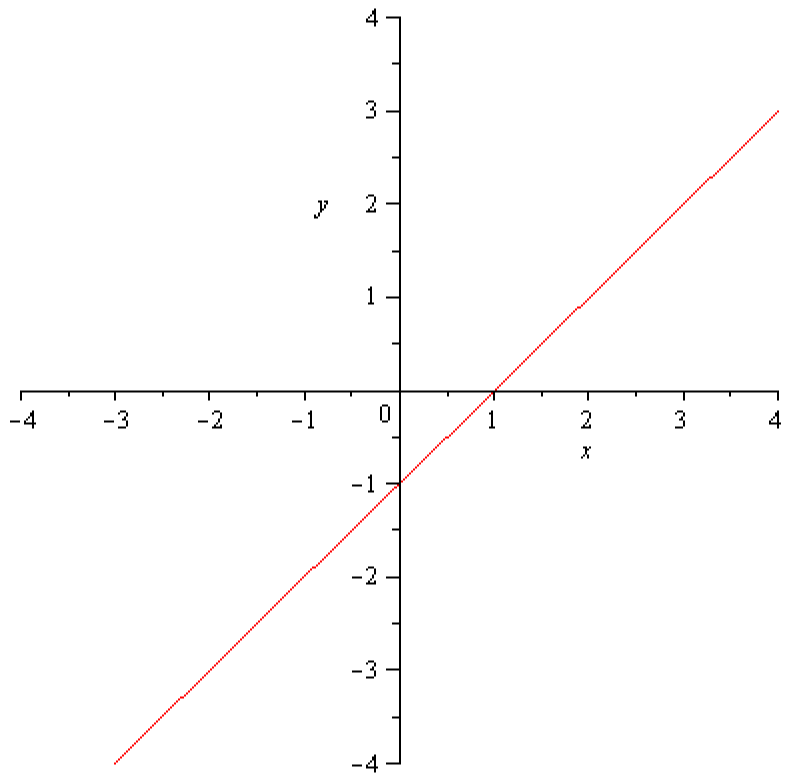


Figura 1.17 $\alpha(x) = x - 1$

Altă definiție: $\alpha(x)$ *infinitezimal*, pentru $x \to x_0$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ astfel încât $|\alpha(x)| < \varepsilon$ pentru $\forall x, x \neq x_0$ și $|x - x_0| < \delta$.

Observație: Analog, pot fi definiți infinitezimali pentru $x \to \infty$. De exemplu:

□ $\alpha(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$ este un infinitezimal pentru $x\to\infty$, deoarece $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

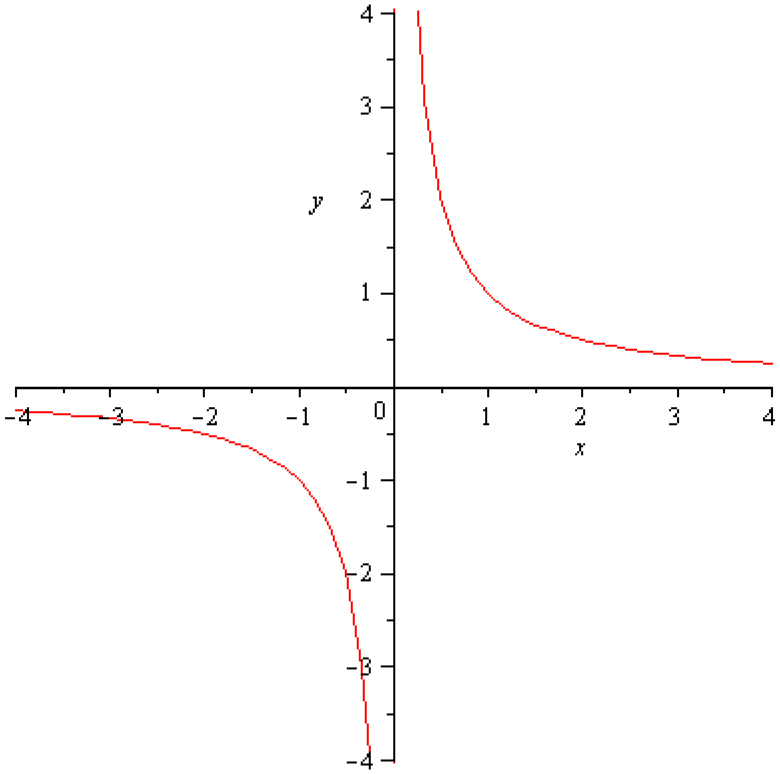


Figura 1.18 $\alpha(x)=\frac{1}{x}$

□ $\alpha(x)=e^{-x}$ este un infinitezimal pentru $x\to+\infty$, deoarece $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

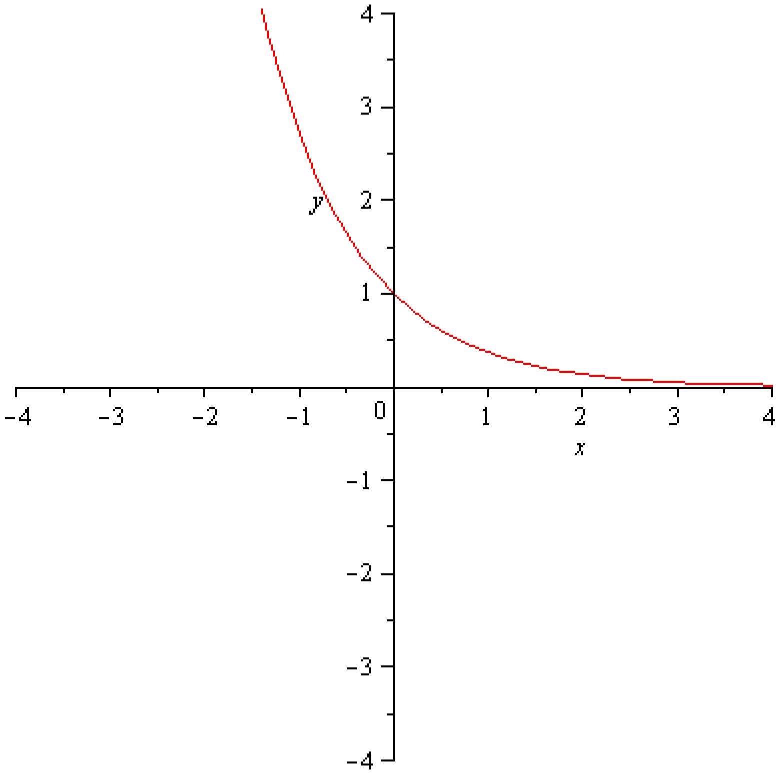


Figura 1.19 $\alpha(x)=e^{-x}$

Infinitezimali. Proprietăți.

Teorema 1 Dacă $\alpha(x)$ şi $\beta(x)$ sunt infinitezimali pentru $x \to x_0$, atunci şi suma $\alpha(x)+\beta(x)$ este infinitezimal pentru $x \to x_0$.

Teorema 2 Dacă $\alpha(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$ şi dacă o funcție $f(x)$ este mărginită pe o vecinătate a lui x_0, atunci produsul $\alpha(x)f(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$.

Exemplu: Funcția $y = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$ poate fi considerată ca un produs de funcții $\alpha(x) = x$ şi $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Funcția $\alpha(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to 0$ şi $f(x)$ este mărginită pe orice vecinătate a punctului $x = 0$. Atunci, cu teorema 2, $y = x\sin\frac{1}{x}$ este un infinitezimal pentru $x \to 0$ şi are loc

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

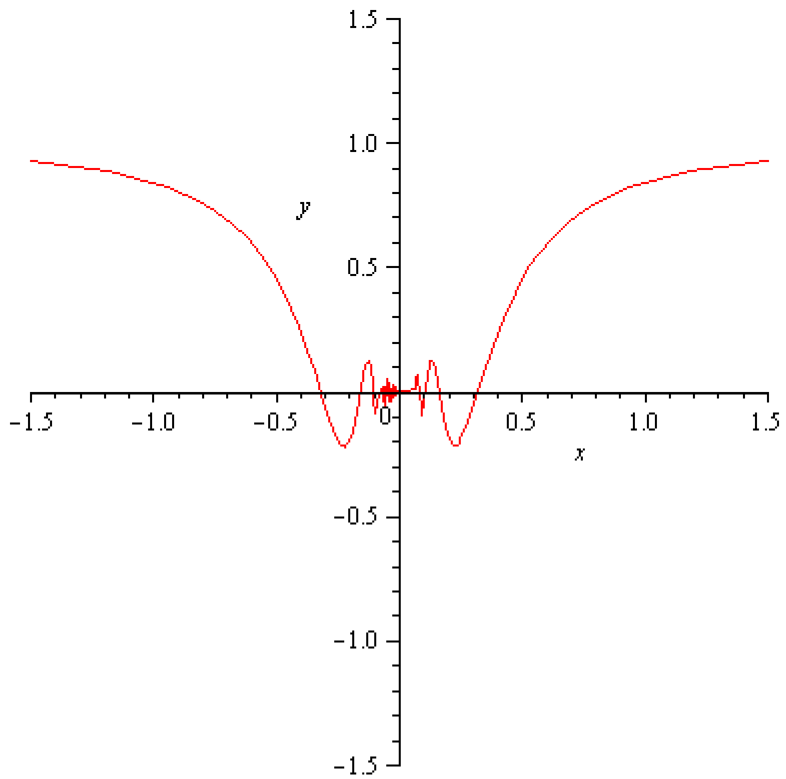


Figura 1.20 $y = x\sin\frac{1}{x}$

Remarcă: Dacă o funcție $\alpha(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$ şi dacă o funcție $f(x)$ are limită finită în x_0, atunci produsul $\alpha(x)f(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$.

Teorema 3: Dacă o funcție $\alpha(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$ şi dacă o funcție $f(x)$ are limită nenulă în x_0, atunci raportul $\alpha(x)/f(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$.

Observație: Condiția $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq 0$ din teorema 3, este esențială.

Exemplu: $\alpha(x) = x \quad f(x) = x^2$

$\alpha(x)$ infinitezimal pentru $x \to 0$
$f(x)$ are limită nulă în $x = 0$, adică $f(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to 0$

$$\frac{\alpha(x)}{f(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \text{ nu este un infinitezimal pentru } x \to 0.$$

Observație: In general, raportul a doi infinitezimali nu este un infinitezimal.

1.8 Noțiunea de infinit

Definiție: Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate a punctului x_0, cu o posibilă excepție în x_0. Funcția $f(x)$ este *infinită* pentru $x \to x_0$, dacă pentru orice număr $M > 0$, oricât de mare, există un număr $\delta > 0$ astfel încât

$$|f(x)| > M$$

pentru $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$

Notație: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Observație: Atunci când spunem că limita lui $f(x)$ este *A*, înțelegem că numărul *A* este finit.

Cu simboluri logice putem rescrie definiția noțiunii de infinit:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \iff \forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ astfel încât } \forall x, x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$$

Cazuri particulare:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0$, $\exists \delta > 0$ astfel încât $\forall x, x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0$, $\exists \delta > 0$ astfel încât $\forall x, x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$.

Exemple:

1) $f(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \neq 0$ este infinită pentru $x \to 0$

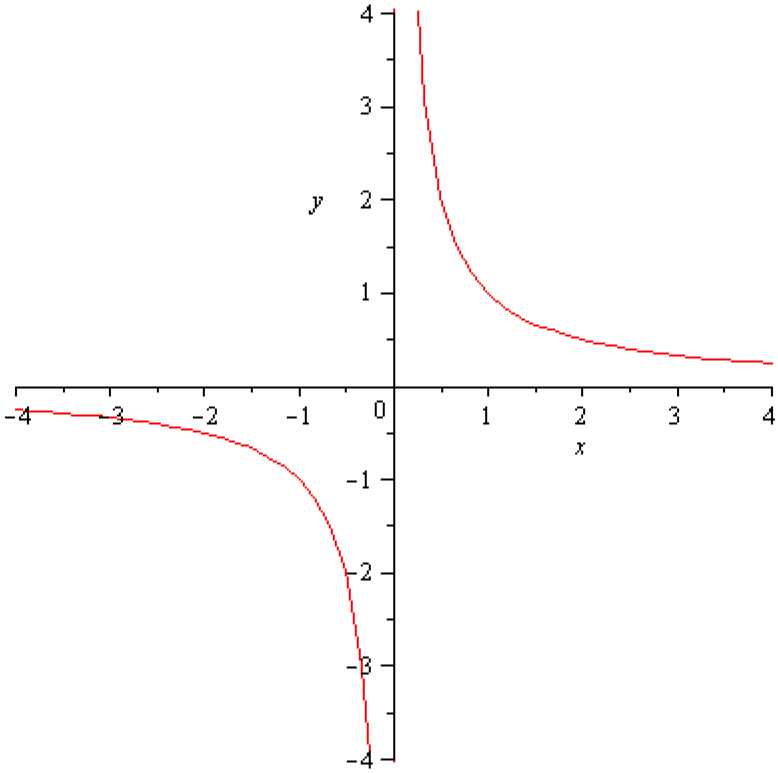


Figura 1.21 $f(x) = \frac{1}{x}$

Intr-adevăr, fie $M > 0$, oricât de mare. Pentru ca $|f(x)| > M \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| > M \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} > M$ să aibă loc este necesar şi suficient ca:

$$|x| = |x - 0| < \frac{1}{M}$$

Considerăm $\delta = \frac{1}{M}$ şi avem:

$\forall M > 0$, $\exists \delta > 0,\ \delta = \frac{1}{M}$ astfel încât $\forall x, x \neq 0$, $|x-0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$.

2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $\forall x \neq 0$ este infinită pentru $x \to 0$

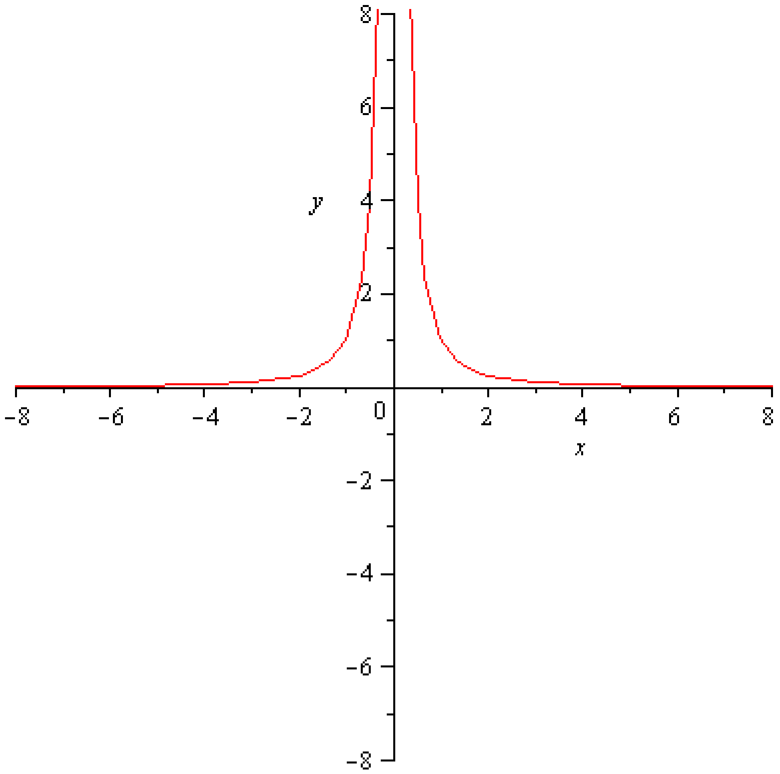


Figura 1.22 $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Intr-adevăr, fie $M > 0$, oricât de mare. $\exists \delta(M) = ?$ astfel încât $\forall x, x \neq 0$, $|x-0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$.

Pentru ca $f(x) > M \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > M \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{M} \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{M} < 0$ să aibă loc este necesar şi suficient ca:

$$x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{M}}, \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{M} \quad \text{deci} \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$$

$\forall M > 0$, $\exists \delta > 0,\ \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ astfel încât $\forall x, x \neq 0$, $|x-0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$.

Interpretare geometrică:

Funcția $f(x)$ este *infinită* pentru $x \to x_0$, dacă fiind dată o bandă orizontală, oricât de lată, între dreptele $y = -M$ şi $y = +M$, există două drepte verticale $x = x_0 - \delta$ şi $x = x_0 + \delta$ astfel încât graficul lui $y = f(x)$, $x \neq x_0$ se află în afara benzii orizontale pentru $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

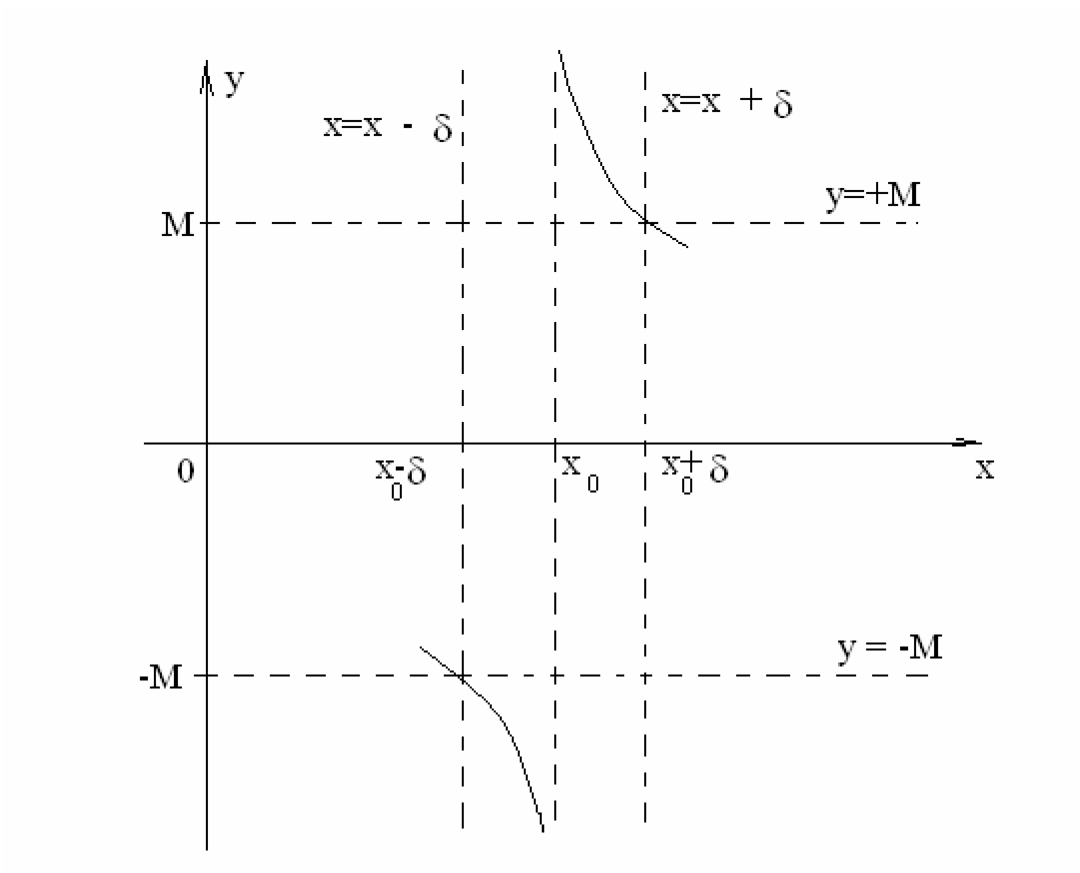


Figura 1.23

Definiție: Spunem că o funcție $f(x)$ este infinită pentru $x \to \infty$ şi scriem $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ dacă pentru orice $M > 0$, oricât de mare, există un număr $N > 0$ astfel încât

$$|f(x)| > M, \quad \forall x, |x| > N$$

Exemplu: $f(x) = x$ este infinită pentru $x \to \infty$

Intr-adevăr, $\forall M > 0$, $\exists N > 0$, $N = M$ astfel încât $|f(x)| = |x| > M$ pentru $\forall x$, $|x| > N$

Relații între infinitezimal şi infinit

Teorema 1: Dacă o funcție $f(x)$ este infinit pentru $x \to x_0$, atunci funcția $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$.

Demonstrație:

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar oricât de mic.

Deoarece $f(x)$ este infinit pentru $x \to x_0$, atunci pentru $\forall M > 0$, fie $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$, $\exists \delta > 0$ a.î.

$$|f(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon} \text{ pentru } x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta$$

Cu definiția $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ avem

$$|\alpha(x)| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{M} = \varepsilon$$

Astfel, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ astfel încât $|\alpha(x)| < \varepsilon$ pentru $\forall x, x \neq x_0$ şi $|x - x_0| < \delta$.

Teorema2: Dacă o funcție $\alpha(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$ şi dacă $\alpha(x)$ este diferit de zero pe vecinătatea $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a lui x_0, cu o excepție posibilă în x_0, atunci funcția $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ este un infinit pentru $x \to x_0$.

Considerăm funcția rațională:

$$y(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n}, \qquad a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0$$

raportul a două polinoame în x de grade m şi n respectiv. Pentru $|x|$ suficient de mare, numitorul este diferit de zero şi astfel raportul are sens.

$$y(x)=\frac{x^m\left(a_0+a_1\frac{1}{x}+a_2\frac{1}{x^2}+\ldots+a_m\frac{1}{x^m}\right)}{x^n\left(b_0+b_1\frac{1}{x}+b_2\frac{1}{x^2}+\ldots+b_n\frac{1}{x^n}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}=\begin{cases}\infty, & m>n\\ \frac{a_0}{b_0}, & m=n\\ 0, & m<n\end{cases}$$

1.9 Operații cu limite

Teorema 1: Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0 cu o excepție posibilă în x_0 . Pentru ca funcția să aibă limita A în x_0 este necesar şi suficient ca funcția să admită reprezentarea

$$f(x)=A+\alpha(x)$$

unde $\alpha(x)$ este un infinitezimal pentru $x\to x_0$.

Exemplu:

$$f(x)=x \quad \text{şi} \quad x_0=2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 2}f(x)=2$$
$$f(x)=2+(x-2)$$

unde 2 este numărul limită, iar $x-2$ este un infinitezimal pentru $x\to 2$.

Teorema2: Fie $f(x)$ şi $g(x)$ două funcții definite pe o vecinătate Ω a punctului x_0 cu o excepție posibilă în x_0 . Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ şi $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$, atunci

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=A\pm B$

b) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=A\cdot B$

c) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$, cu condiția ca $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B\neq 0$.

Demonstrație: Teorema 2 b)

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, atunci cele două funcții admit reprezentările:

$$f(x)=A+\alpha(x) \qquad g(x)=B+\beta(x)$$

unde $\alpha(x)$, $\beta(x)$ sunt infinitezimal pentru $x\to x_0$.

$$f(x)\cdot g(x)=\big(A+\alpha(x)\big)\big(B+\beta(x)\big)=$$

$$=A\cdot B+A\cdot\beta(x)+B\cdot\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)$$

Primul termen din sumă este o constantă, iar următorii trei sunt infinitezimal pentru $x\to x_0$.

Exemple:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-4}{x+1}=\frac{0^2-4}{0+1}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$

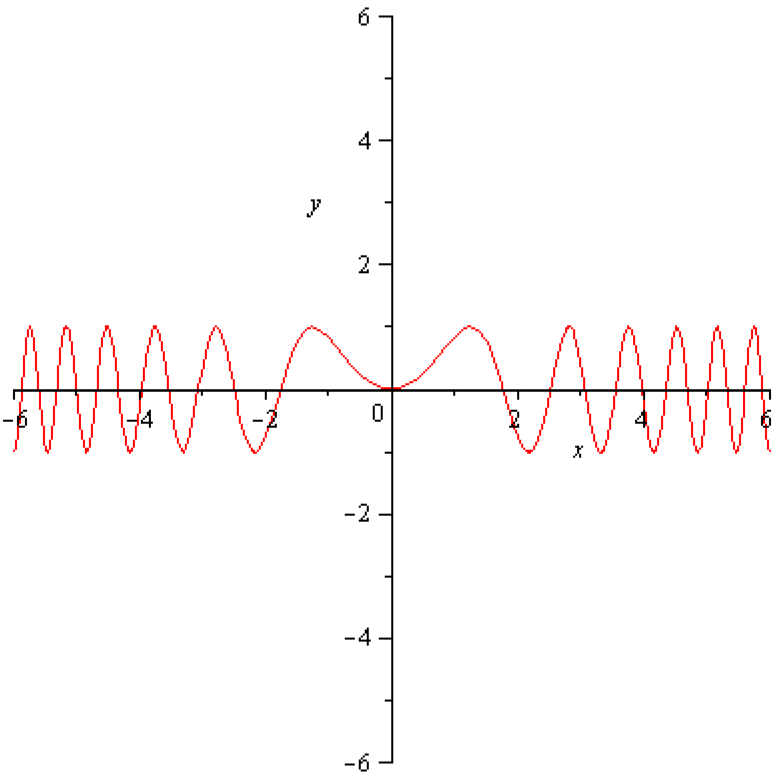
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{1}{2}$

4. $f(x)=\sin x^2$ definită pe $\mathbb{R}$, pară şi mărginită deoarece $\left|\sin x^2\right|\le 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Acestă funcție se anulează în punctele $x=\pm\sqrt{n\pi}$, $n=0,1,2,\ldots$ Considerăm două puncte consecutive, în care funcția se anulează: $\sqrt{n\pi}$ şi $\sqrt{(n+1)\pi}$ şi distanța dintre acestea:

$$d=\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi}+\sqrt{n\pi}}=0$$

Putem concluziona că distanța dintre astfel de două puncte consecutivetinde la zero şi $f(x)=\sin x^2$ nu este periodică.



$$f(x) = \sin\left(x^2\right)$$

1.10 Limite laterale

Definiție: Fie $f(x)$ o funcție definită pe intervalul (a, x_0). Atunci, numărul A este limita la stânga a funcției $f(x)$ în punctul x_0, dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

pentru $\forall x$ cu proprietatea $x_0 - \delta < x < x_0$.

Notație: $\lim\limits_{x \to x_0, x < x_0} f(x) = A$ sau $f(x_0 - 0) = A$

Definiție: Fie $f(x)$ o funcție definită pe intervalul (x_0, b). Atunci, numărul A este limita la dreapta a funcției $f(x)$ în punctul x_0, dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

pentru $\forall x$ cu proprietatea $x_0 < x < x_0 + \delta$.

Notație: $\lim\limits_{x \to x_0, x > x_0} f(x) = A$ sau $f(x_0 + 0) = A$

Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a lui x_0, cu o posibilă excepție în x_0.

Proprietate: Pentru ca $f(x)$ să aibă limită în x_0 este necesar şi suficient ca cele două limite laterale ale lui $f(x)$ în x_0 să existe şi să coincidă, adică

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Exemple:

1) $f(x) = \begin{cases} |x|, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$

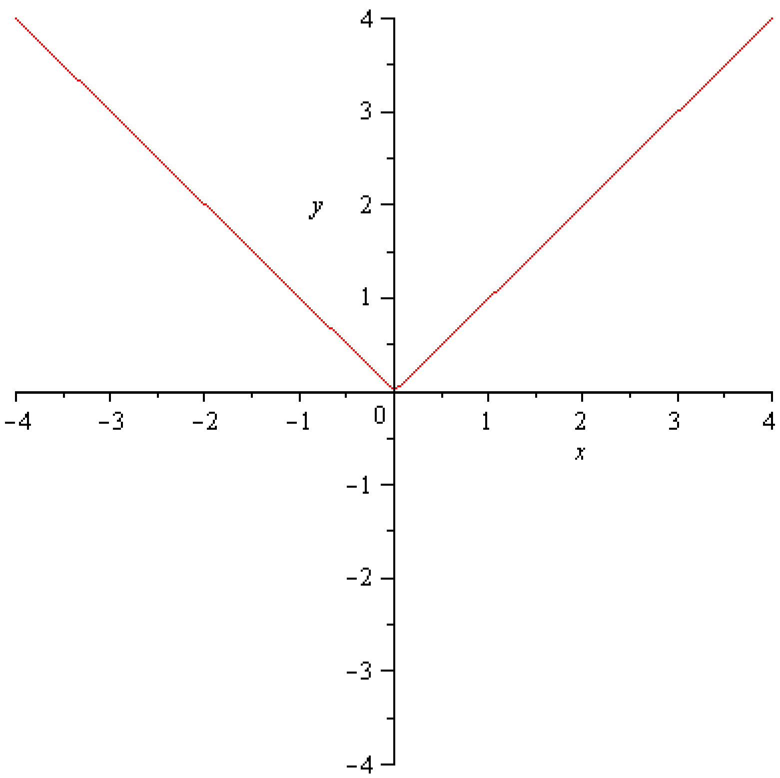


Figura 1.24

$$\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = \lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 0 \qquad \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

2) $\quad f(x) = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}, \quad x \neq 0$

$$\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 0 \qquad \Rightarrow nu \ \exists \ \lim_{x\to 0} f(x)$$

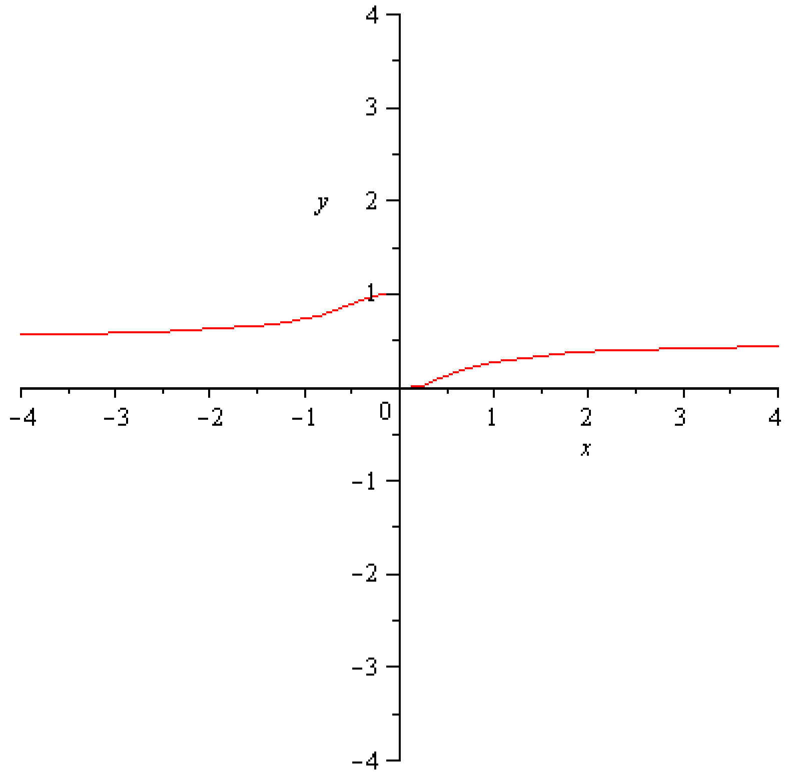


Figura 1.25 $\quad f(x) = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}, \ x \neq 0$

3) $\quad f(x) = e^{1/x}, \quad x \neq 0$

$$\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0, x>0} f(x) = +\infty \qquad \Rightarrow nu \ \exists \ \lim_{x\to 0} f(x)$$

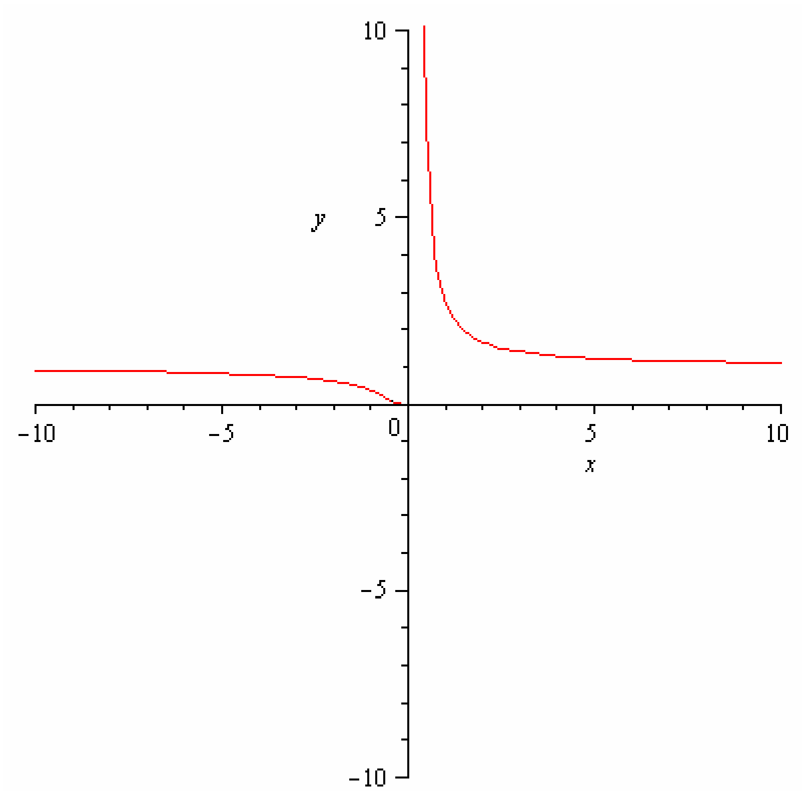


Figura 1.26 $f(x)=e^{\frac{1}{x}},\ x\neq 0$

Exerciții:

- □ Fie $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-2}}},\ x\neq 2$. Are funcția limită în $x_0=2$?

- □ Fie $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1},\ x\neq \pm 1$. Are funcția limită în $x_0=-1$ și $x_0=1$?

1.11 Noțiunea de continuitate într-un punct

Definiție: Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0. Funcția $f(x)$ este *continuă în x_0* dacă:

(i) $f(x)$ are limită în x_0

(ii) limita lui $f(x)$ în x_0 este egală cu valoarea funcției în punctul x_0, $f(x_0)$

Adică

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{1}$$

Observație: Deoarece $x_0 = \lim_{x \to x_0} x$, relația precedentă se poate rescrie

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) \tag{2}$$

Se observă că pentru o funcție continuă simbolurile *lim* şi *f* pot fi permutate.

Definiție: (cu ε, δ) Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0. Funcția $f(x)$ este *continuă în x_0* dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{3}$$

pentru $\forall x$ care verifică $|x - x_0| < \delta$ şi $x \in \Omega$.

Cu simboluri logice, ultima definiție poate fi rescrisă:

$$f(x) \text{ continuă în } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ astfel încât } \forall x \in \Omega,\ |x - x_0| < \delta$$

$$\Rightarrow \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Observații: In general $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ şi definiția continuității nu cere ca $x \neq x_0$.

Fie $y = f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0.

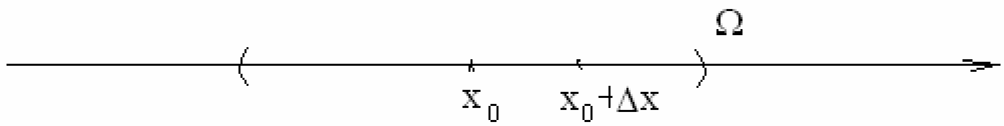


Figura 1.27

Considerăm punctul $x = x_0 + \Delta x$ din Ω, care diferă de punctul x_0 cu o cantitate pozitivă sau negativă notată Δx. Cantitatea Δx este *creşterea* sau *incrementul* argumentului x în x_0. Diferența

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \qquad (4)$$

se numeşte *creşterea* sau *incrementul* funcției $f(x)$ în x_0 corespunzător creşterii Δx a variabilei independente x.

In termeni de creşteri, continuitatea lui $f(x)$ în x_0, adică

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (5)$$

devine

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \qquad (6)$$

Sau

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \qquad (7)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad (8)$$

Definiție: Fie $f : \Omega \to \mathbb{R}$. $f(x)$ *continuă* în $x_0 \in \Omega$ dacă creşterea sau incrementul funcției $f(x)$ în x_0 corespunzător creşterii Δx a variabilei independente x tinde la zero pentru $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad (9)$$

Exemplu:

$y = x^2$ este continuă în fiecare punct al dreptei reale.

Intr-adevăr, pentru orice creştere Δx a argumentului x în punctul x_0 avem

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = (2x_0 + \Delta x)\Delta x$$

$\Rightarrow$ $\Delta y \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$ $\Rightarrow$ funcția este continuă în fiecare punct x_0 al dreptei reale.

Definiție: (cu şiruri) Fie $f : E \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in E$. $f(x)$ *continuă* în $x_0 \in E$ dacă pentru orice şir $\{x_n\}$, $x_n \in E$ convergent la x_0, şirul corespunzător imagine $\{f(x_n)\}$ converge la $f(x_0)$.

Exemplu: Funcția Dirichlet este discontinuă în orice punct.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Intr-adevăr, fie x_0 un număr irațional cu $f(x_0) = 0$ şi oricare ar fi x_0, există un şir $\{x_n\}$ de numere raționale care converge la x_0. Dar, cu definiția funcției $f(x_n) = 1$, $\forall n$

$\Rightarrow$ şirul $\{f(x_n)\} = \{1\}$ converge la unu şi deci $\{f(x_n)\}$ nu converge la $f(x_0)$

In concluzie, funcția nu este continuă în x_0 irațional. Analog se verifică faptul că funcția nu este continuă în x_0 rațional.

Proprietăți ale funcțiilor continue într-un punct

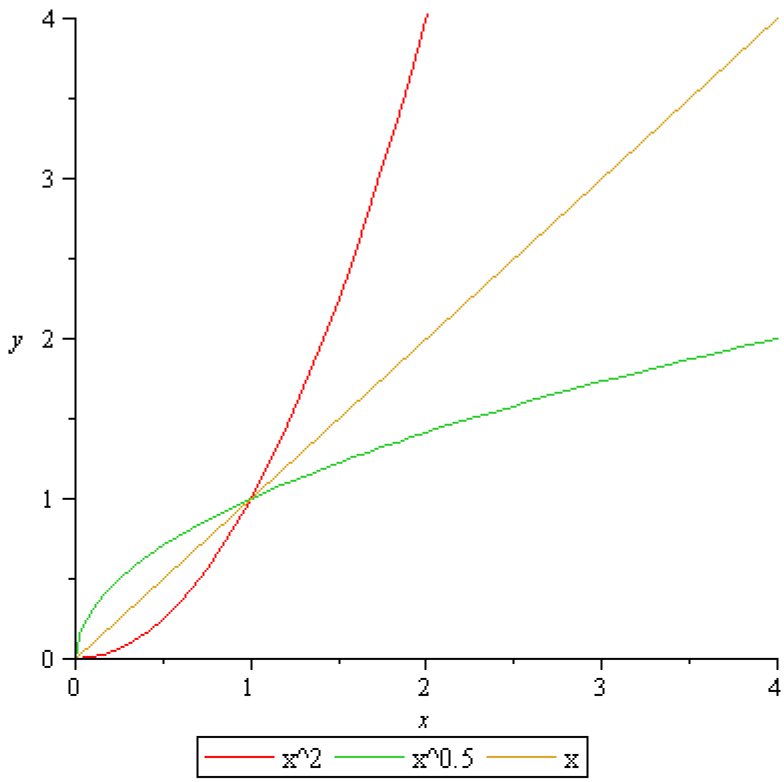
Teorema 1: Dacă o funcție $f(x)$ este continuă în x_0 şi dacă $f(x_0) > A$ (sau $f(x_0) < A$), atunci $\exists\delta$ astfel încât $f(x) > A$ (sau $f(x) < A$) pentu $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Teorema 2: Dacă o funcție $f(x)$ este continuă în x_0 şi dacă $f(x_0) \neq 0$, atunci există o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a lui x_0 astfel încât $f(x)$ nu se anulează şi are semn constant pe toată vecinătatea.

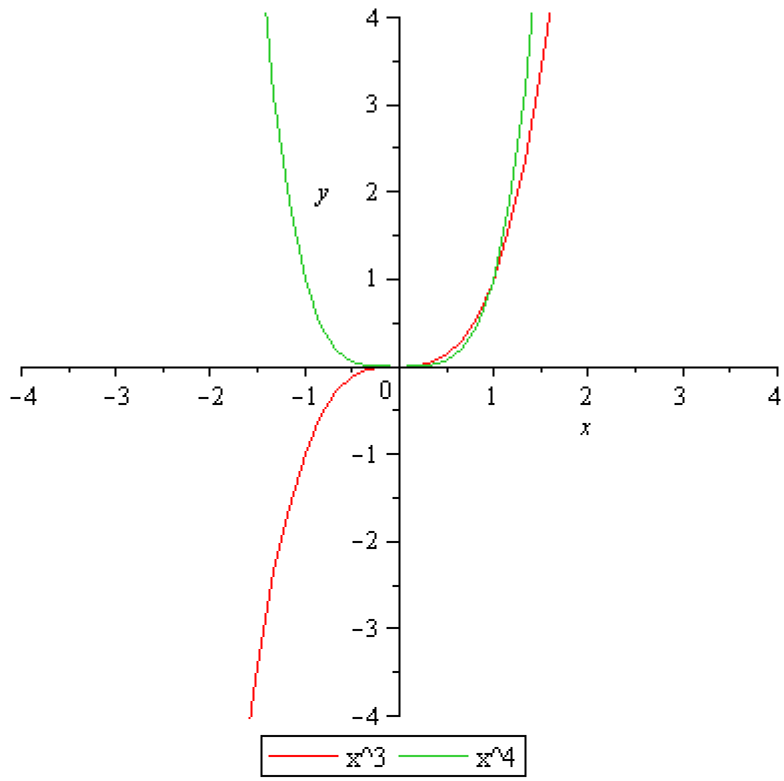
Continuitatea funcțiilor elementare

Funcțiile *elementare de bază* sunt:

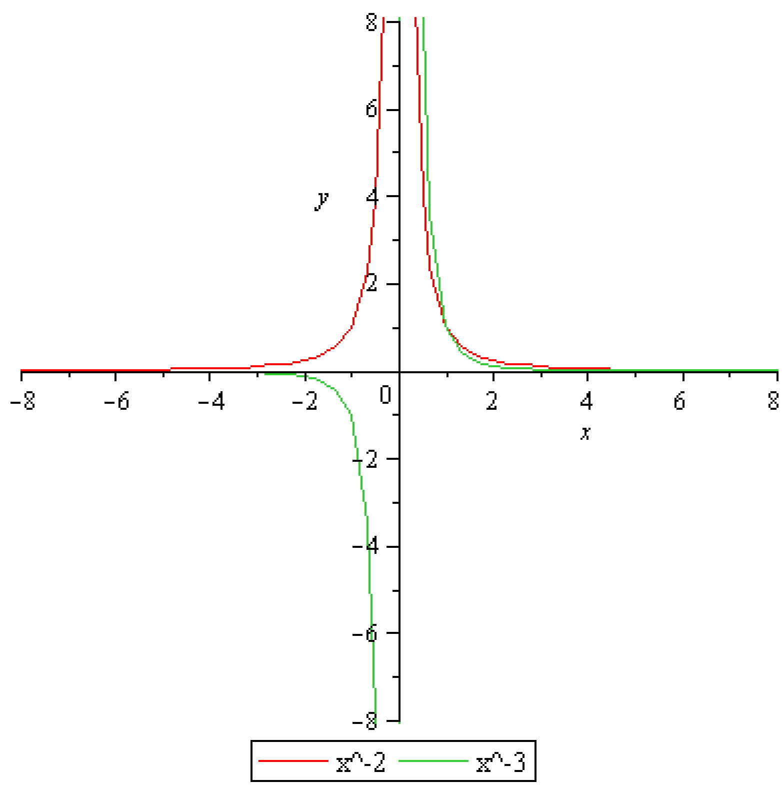
1) Funcția putere $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$, $x > 0$



Dacă exponenții sunt numere întregi pozitive, atunci funcția putere este definită pe toată dreapta reală. De exemplu:



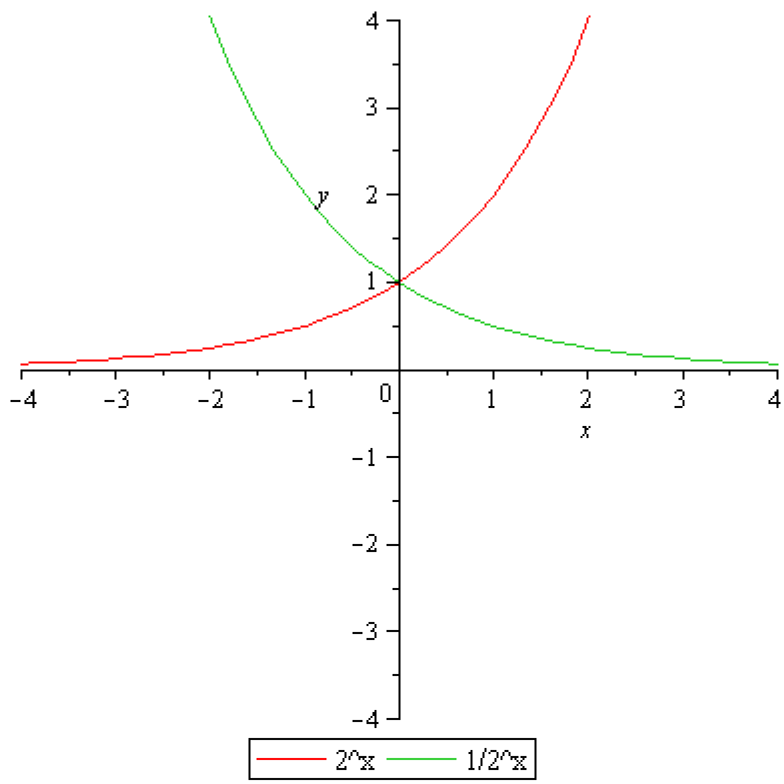
Dacă exponenții sunt numere întregi pozitive, atunci funcția putere este definită pe dreapta reală, fără zero. De exemplu:



Dacă $\alpha = \pm \frac{p}{q}$ cu p,q întrgi pozitivi, atunci funcția putere este definită pe $\mathbb{R}$ pentru q impar şi pe $[0,+\infty)$ pentru q par.

2) Funcția exponențială $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in R$

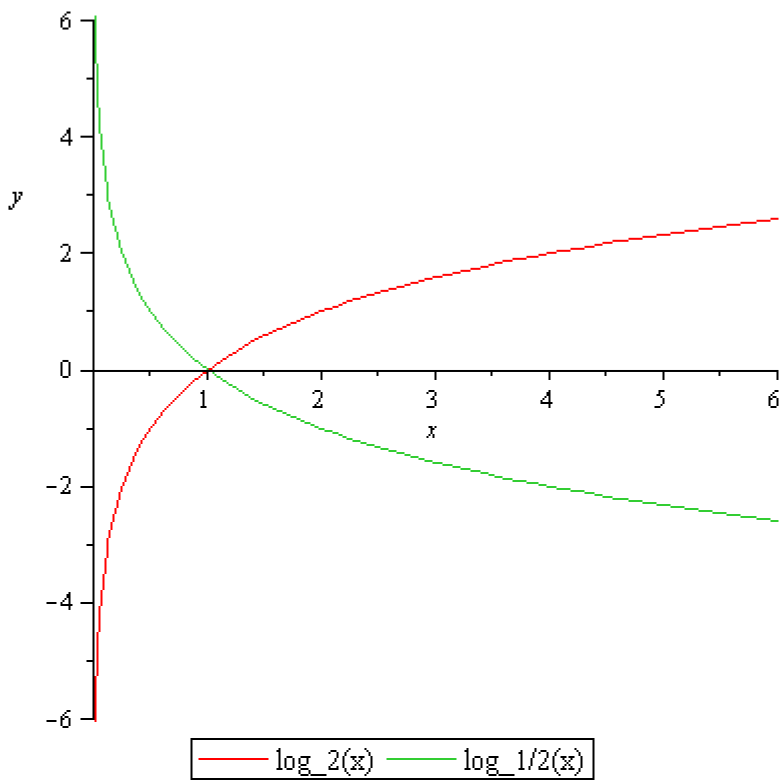
Este monoton crescătoare pentru $a > 1$ şi monoton descrescătoare pentru $a \in (0,1)$.
Pentru bază supraunitară, $2 \in (1,+\infty)$ în exemplul de mai jos, funcția este crescătoare, iar pentru bază subunitară, $1/2 \in (0,1)$ în exemplul de mai jos, funcția este descrescătoare.



3) Funcția logaritmică $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$

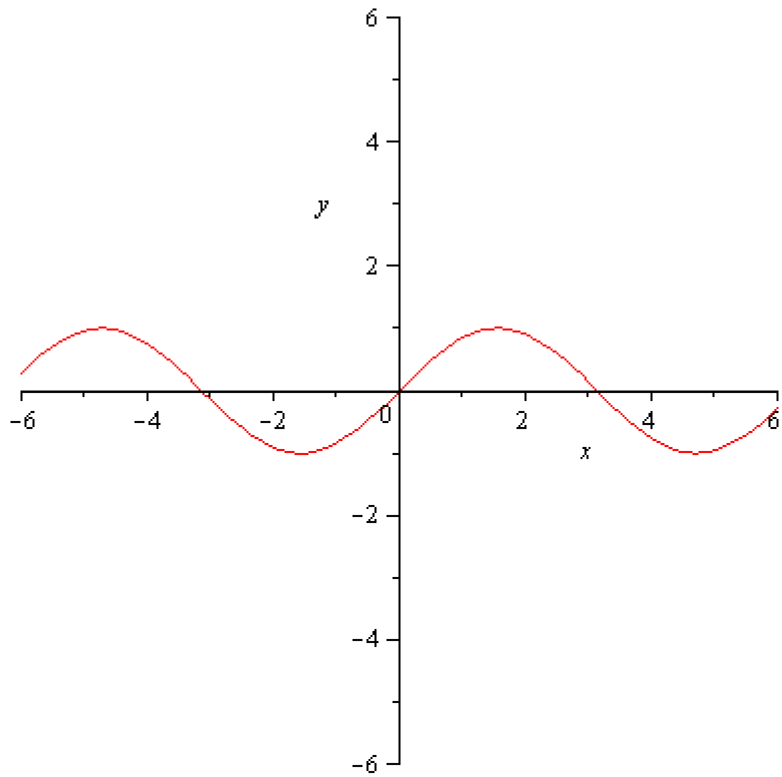
Este monoton crescătoare pentru $a > 1$ şi monoton descrescătoare pentru $a \in (0,1)$.

Observație: În figura de mai jos baza logaritmului este o dată supraunitară, anume $2 \in (1,+\infty)$, deci funcția logaritmică considerată va fi una crescătoare şi apoi subunitară adică $\frac{1}{2} \in (1,\infty)$ şi funcția va fi una descrescătoare.

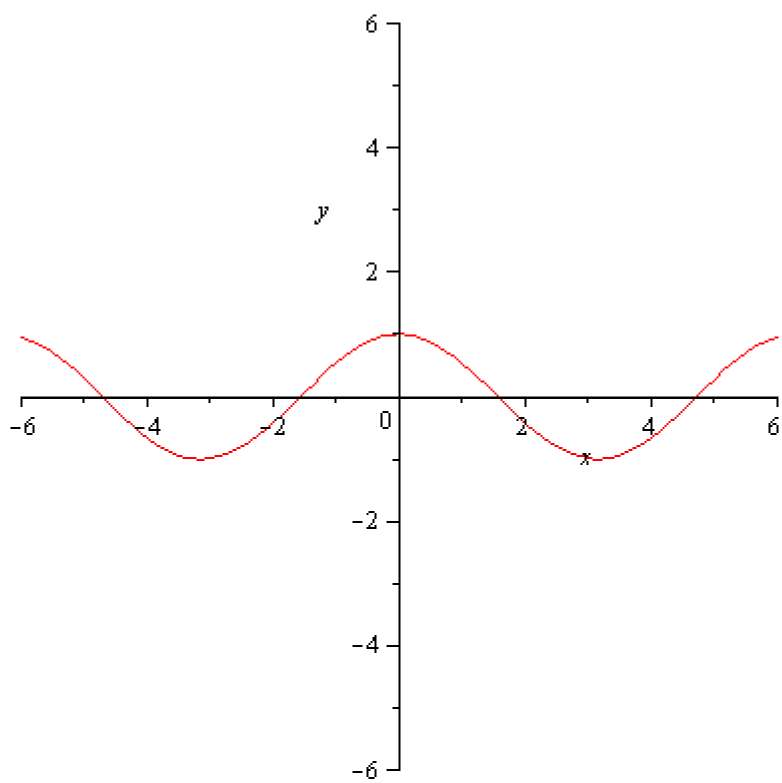


4) Funcțiile trigonometrice

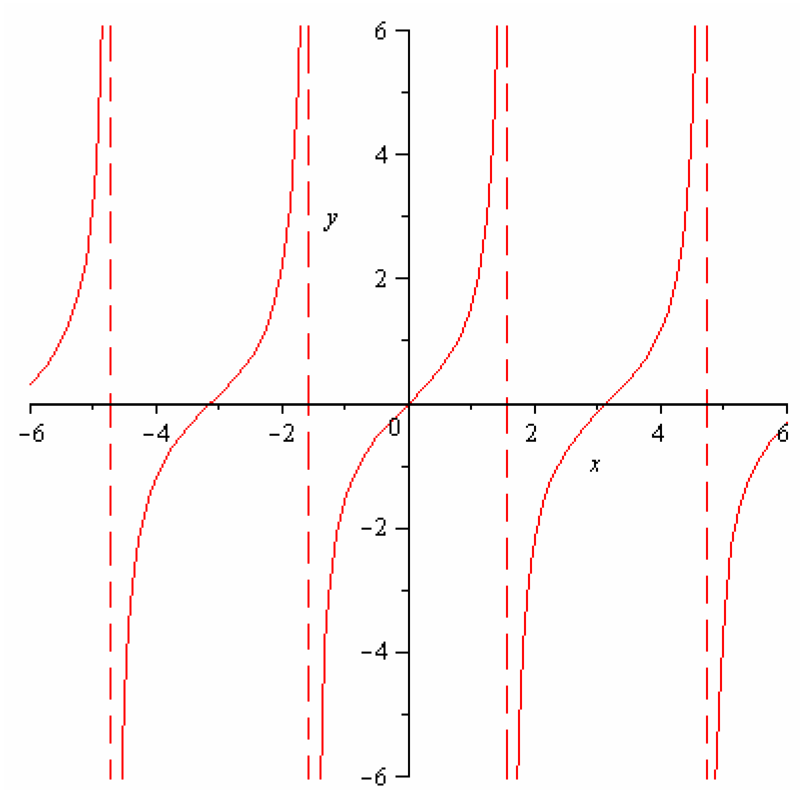
a) $y = \sin x$, $x \in R$, o funcție periodică cu perioada $T = 2\pi$



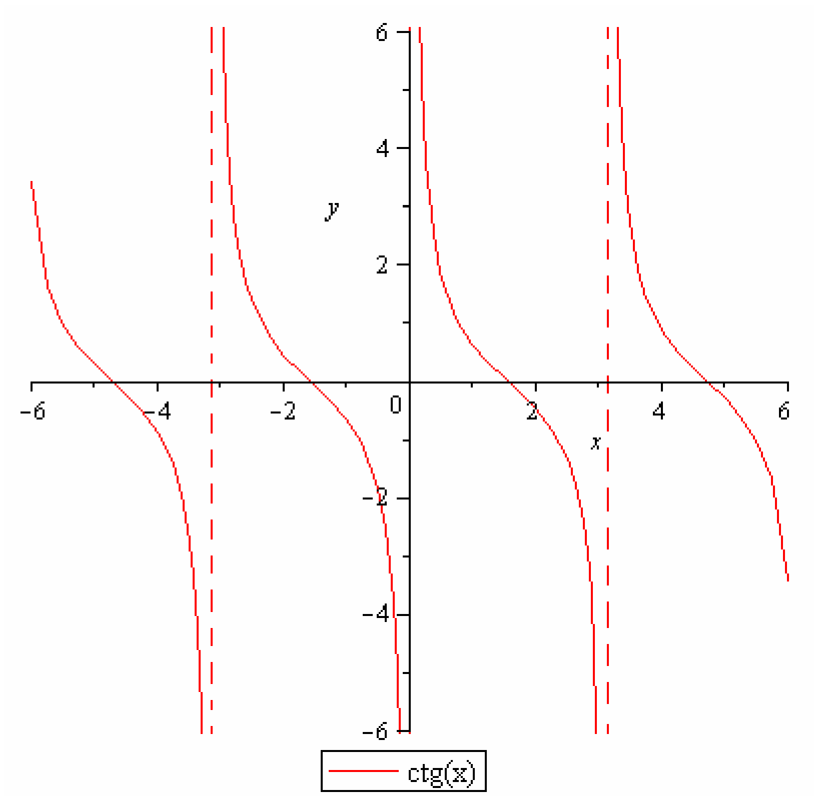
b) $y = \cos x$, $x \in R$, o funcție periodică cu perioada $T = 2\pi$



c) $y = tgx$, $x \in R - \left\{ \dfrac{\pi}{2} + n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}$

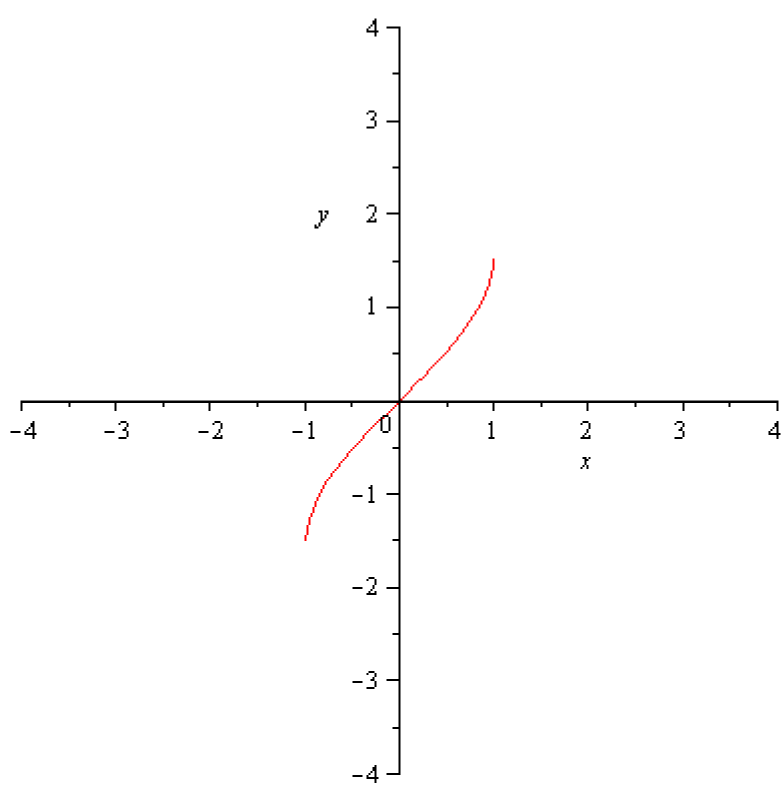


d) $y = ctgx$, $x \in R - \{ n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \}$

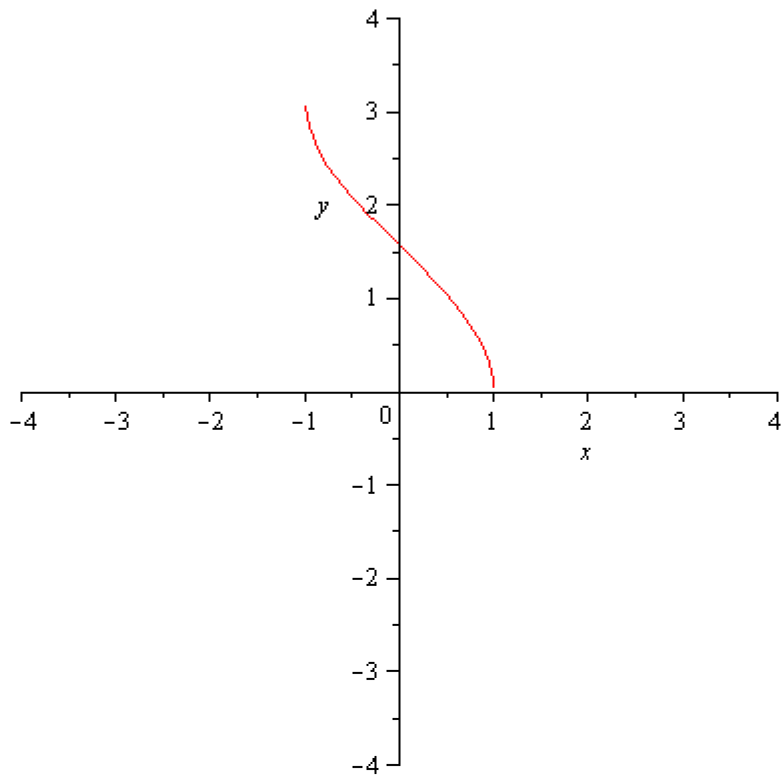


5) funcțiile trigonometrice inverse:

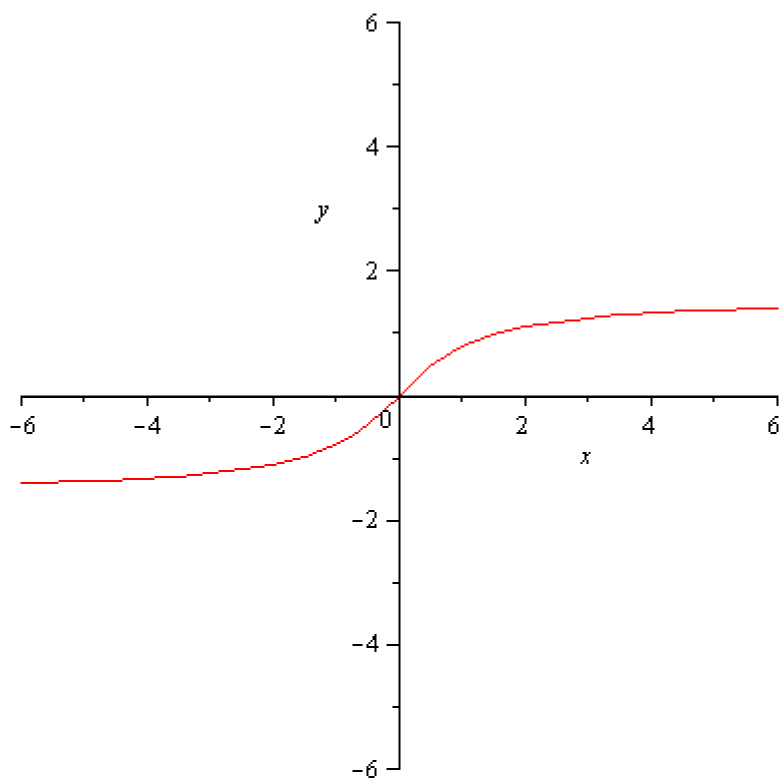
a) $y = \arcsin x$, $x \in [-1,+1]$



b) $y = \arccos x$, $x \in [-1, +1]$



c) $y = arctgx$, $x \in R$



d) $y = arcctgx$, $x \in R$

Obsevație: Funcțiile obținute din acestea, printr-un număr finit de operații aritmetice şi prin compuneri funcție de funcție, se numesc *funcții elementere*.

Proprietate: Funcțiile elementare de bază sunt *continue* în fiecare punct al domeniului de definiție.

Operații cu funcții continue într-un punct

Teorema 3: Fie $f(x)$ şi $g(x)$ două funcții definite pe o vecinătate a punctului x_0. Dacă $f(x)$ şi $g(x)$ sunt continue în x_0 , atunci suma $f(x)+g(x)$, diferența $f(x)-g(x)$, produsul $f(x)\cdot g(x)$ şi raportul $f(x)/g(x)$ cu $g(x_0)\neq 0$ sunt continue în x_0.

Exerciții:

Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Calculați: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{5x}$

1.12 Funcții compuse

Fie E o mulțime de numere reale şi fie $u=\varphi(x)$ o funcție definită pe E. Notăm cu E_1 mulțimea de valori a funcției u pentru $x\in E$. Mai mult, fie $y=f(u)$ o funcție definită pe E_1. Atunci, la fiecare $x\in E$ îi corespunde un $u\in E_1$, care la rândul său este asociat cu o valoare $y=f(u)$. Astfel, valoarea y este o funcție de x şi este definită pe E. Spunem că y este o *funcție compusă* de x şi scriem

$$y=f[\varphi(x)]$$

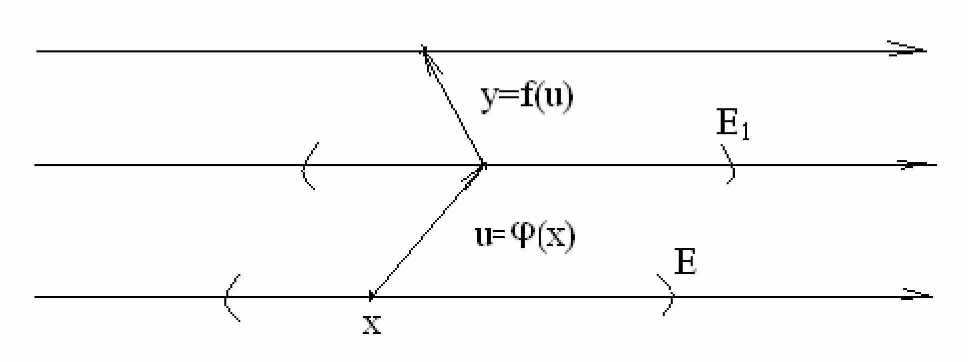


Figura 1.28

Exemple: $u = \sin x$ şi $y = e^u$ atunci $y = e^{\sin x}$ este o funcție compusă de *x*.

$u = 10x$ şi $y = \sin u$ atunci $y = \sin(10x)$ este o funcție compusă de *x*.

Teorema 1: Dacă $u = \varphi(x)$ are $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$ şi dacă $y = f(u)$ este o funcție continuă în punctul $u = A$, atunci funcția compusă $y = f[\varphi(x)]$ are limita $f(A)$ în punctul x_0, adică

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f(A)$$

sau echivalent

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f\left[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\right]$$

Observație: Această ultimă relație indică regula de calcul a limitei unei funcții compuse.

Exemplu:

$$\lim_{x \to o} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Intr-adevăr, $y = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$ este o funcție compusă din $y = \ln u$ şi $u = (1+x)^{\frac{1}{x}}$. Deoarece $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ şi $y = \ln u$ este continuă în $u = e$, teorema 1 implică

$$\lim_{x\to o}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1$$

Teorema 2: Fie $u=\varphi(x)$ o funcție continuă în x_0 şi fie $y=f(u)$ o funcție continuă în $u_0=\varphi(x_0)$. Atunci, funcția compusă $y=f[\varphi(x)]$ este continuă în x_0.

Exerciții: Exercițiile următoare folosesc

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \text{ şi } \lim_{x\to x_0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e \text{ dacă } \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0 \text{ şi } \alpha(x)\neq 0\,, x\neq x_0$$

- ☐ $\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{ctg^2 x}$
- ☐ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$
- ☐ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$
- ☐ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$
- ☐ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$
- ☐ $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}$

1.13 Puncte de discontinuitate

Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate a punctului x_0. Dacă $f(x)$ este continuă în x_0, atunci

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

sau în termeni de limite laterale

$$\lim_{x\to x_0, x<x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0, x>x_0} f(x)=f(x_0)$$

Definiție: O funcție $f(x)$ are o *discontinuitate* în punctul x_0 dacă $f(x)$ nu este continuă în x_0 şi x_0 se numeşte *punct de discontinuitate*.

Observație: Funcția poate să nu fie definită în punctul de discontinuitate.

Clasificarea punctelor de discontinuitate

Definiție: Punctul x_0 este *punct de discontinuitate care poate fi înlăturată* pentru funcția $f(x)$ dacă funcția are limite laterale egale în x_0 dar diferite de $f(x_0)$, adică

$$\lim_{x \to x_0, x < x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

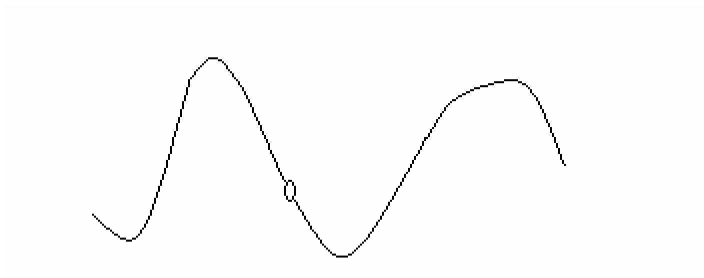


Figura 1.29

Observație: Este suficient să modificăm funcția doar în punctul x_0 astfel încât funcția să devină continuă în punctul x_0 .

Dacă $f(x)$ are în punctul x_0 o discontinuitate care poate fi înlăturată, atunci funcția

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x), & x = x_0 \end{cases}$$

numită *prelungita prin continuitate* a funcției $f(x)$ în x_0, este continuă în punctul x_0. Discontinuitatea din x_0 a fost înlăturată modificând valoarea lui $f(x)$ în punctul x_0.

Exemplu:

$$f(x)=\begin{cases}|x|, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$$

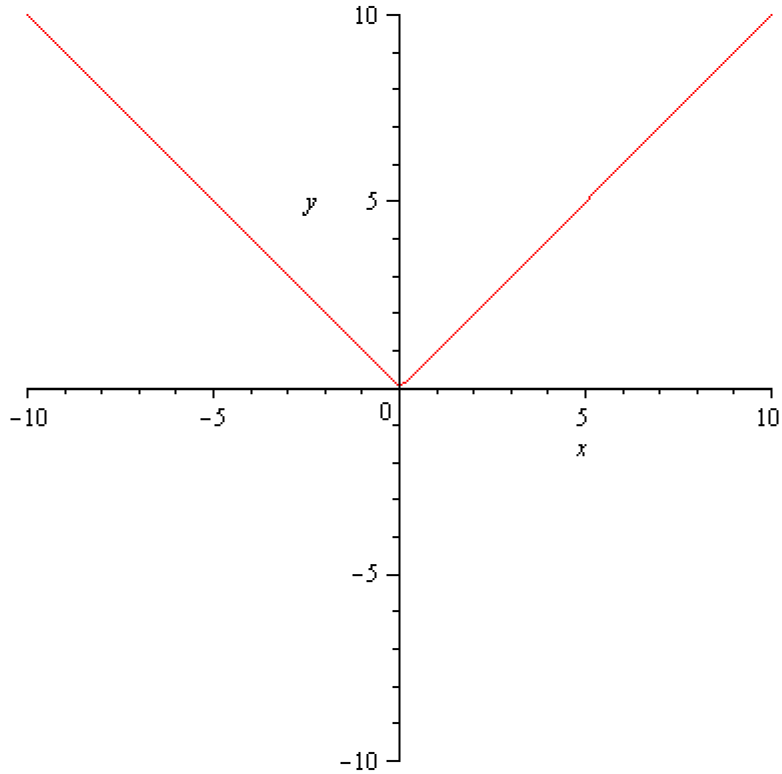


Figura 1.30

$$\lim_{x\to 0, x<0} f(x)=\lim_{x\to 0, x>0} f(x)=0\neq 1=f(0)$$

$\Rightarrow$ $x=0$ este discontinuitate care poate fi înlăturată. Dacă modificăm funcția în $x=0$, considerând $f(0)=0$, atunci $F(x)=|x|$ este continuă în $x=0$.

Definiție: Dacă limitele laterale ale lui $f(x)$ în x_0 sunt finite şi diferite, adică

$$\lim_{x\to x_0, x<x_0} f(x)\neq \lim_{x\to x_0, x>x_0} f(x)$$

Atunci punctul x_0 este o discontinuitate în care funcția are *un salt*. Saltul funcției în punctul x_0 este

$$f(x_0+0)-f(x_0-0)$$

Exemplu:

$$f(x)=\frac{2}{1+e^{1/x}}, \quad x\neq 0 \quad \text{şi} \quad f(0)=1$$

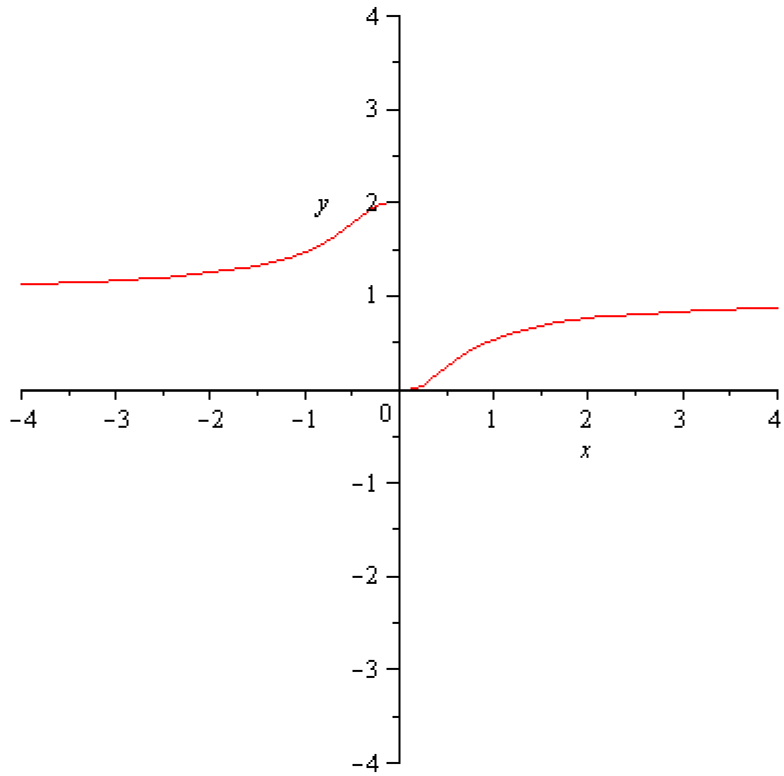


Figura 1.31

Această funcţie are salt în $x=0$ deoarece $\lim\limits_{x\to 0, x<0} f(x)=2$ şi $\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x)=0$

Punctele de discontinuitate care pot fi înlăturate şi punctele în care funcţia are salt se numesc *puncte de discontinuitate de speţa I*. Toate celelalte sunt *puncte de discontinuitate de speţa II*. In punctele de discontinuitate de speta I limitele laterale există şi sunt finite. In punctele de discontinuitate de speţa II, limita la stânga şi (sau) limita la dreapta fie nu există fie sunt infinite.

Exemple:

1. $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$ punctul $x=0$ este o discontinuitate de speţa II, limitele laterale în $x=0$ sunt infinite.

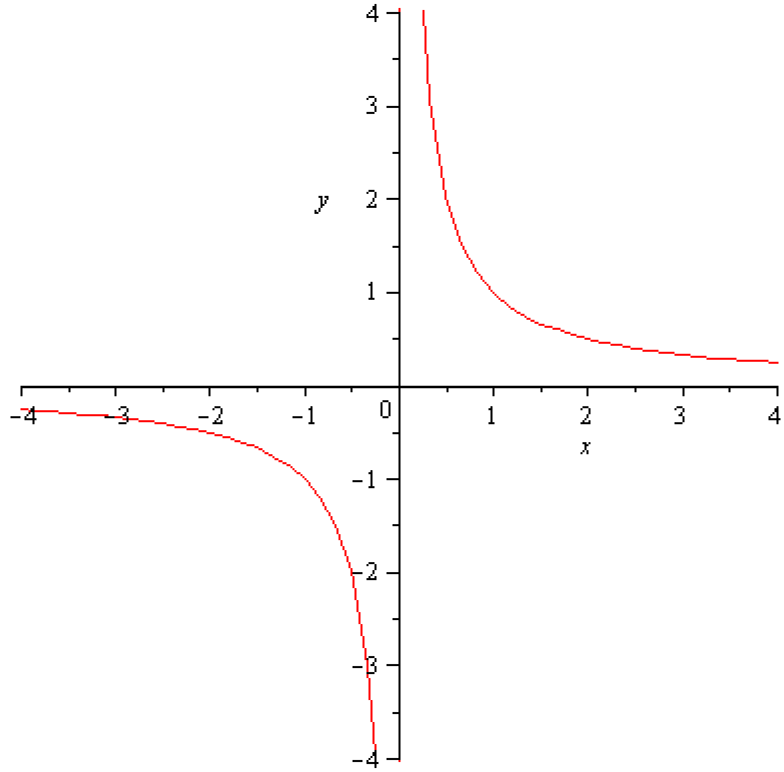


Figura 1.32 $f(x) = 1/x$

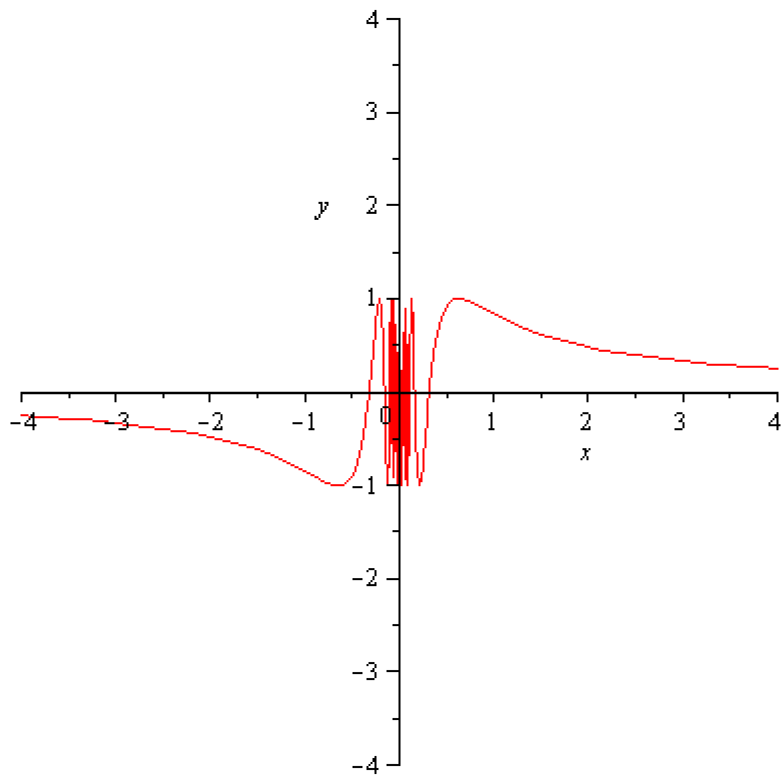


Figura 1.33 $f(x) = \sin(1/x)$

2. $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x\neq 0$ punctul $x=0$ este o discont. de speța II, limitele laterale nu există în $x=0$.

3. Pentru funcția Dirichlet, toate punctele reale sunt discontinuități de speța II.

Continuitate laterală

Definiție: Spunem că funcția $f(x)$ este *continuă la stânga* în x_0, dacă

$$\lim_{x\to x_0, x<x_0} f(x)=f(x_0)$$

şi este *continuă la dreapta* în x_0, dacă

$$\lim_{x\to x_0, x>x_0} f(x)=f(x_0)$$

Proprietate: $f(x)$ este continuă în x_0 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ este continuă la stânga şi la dreapta în x_0.

Exerciții:

- Să se studieze continuitatea funcțiilor:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x+2}}}, & x\neq -2\\ 0, & x=-2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{x} \neq 0\\ 1, & \text{x=0}\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}arctg\,\dfrac{\pi}{2-x}, & x\neq 2\\ \alpha, & x=2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

□ Fie

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in[0,1]\\ 3ax+3, & x\in(1,2]\end{cases}$$

Să se determine constanta *a*, astfel încât funcția să fie continuă pe segmentul $[0,2]$. Să se reprezinte grafic funcția obținută.

1.14 Continuitate pe un interval închis

O funcție $f(x)$ este continuă pe un interval deschis (a,b) dacă $f(x)$ este continuă în fiecare punct al intervalului. Notăm mulțimea tuturor funcțiilor continue pe un interval deschis (a,b) cu $C(a,b)$.

O funcție $f(x)$ este continuă pe un interval închis $[a,b]$ dacă $f(x)$ este continuă pe un interval deschis (a,b) şi dacă funcția este continuă la stânga în *b* şi la dreapta în *a*. Notăm mulțimea tuturor funcțiilor continue pe un interval închis $[a,b]$ cu $C[a,b]$.

Teorema 1: Fie $f(x)$ o funcție continuă pe un interval închis $[a,b]$ şi fie $f(a)$ şi $f(b)$ două numere cu semne diferite. Atunci există cel puțin un punct $c\in(a,b)$ astfel încât $f(c)=0$.

Interpretare geometrică: Dacă $f(a)f(b)<0$, atunci punctele $(a,f(a))$ şi $(b,f(b))$ sunt în semiplane diferite relativ la axa *x* şi graficul funcției continue $f(x)$ intersectează axa *x* în cel puțin un punct.

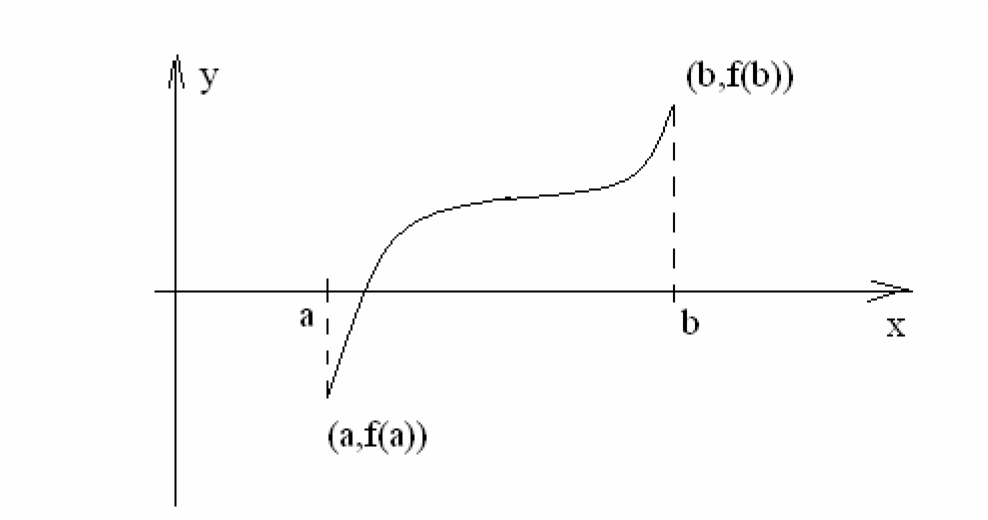


Figura 1.34

Aplicație: Considerăm o ecuație polinomială de grad impar cu coeficienți reali.

$$P_{2n+1}(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \ldots + a_{2n+1} = 0$$

Presupunem $a_0 > 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} P_{2n+1}(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} P_{2n+1}(x) = -\infty$$

Deoarece funcția polinomială este continuă pe $\mathbb{R}$, polinomul $P_{2n+1}(x)$ se anulează în cel puțin un punct. In concluzie, polinomul de grad impar cu coeficienți reali are cel puțin o rădăcină reală.

Observație: Teorema 1 poate fi folosită pentru a determina dacă un polinom are rădăcini reale, iar în caz afirmativ să determinăm valorile aproximative ale acestora.

Exemplu:

$$P_3(x) = x^3 + x - 1$$

Polinomul are grad impar, deci are cel puțin o rădăcină reală.

$$P_3(0) = -1 < 0 \qquad P_3(1) = +1 > 0$$

La capetele intervalului $[0,1]$ polinomul $P_3(x)$ ia valori cu semne opuse $\overset{Teorema 1}{\Rightarrow}$ polinomul are o rădăcină reală în $(0,1)$.

Mijlocul intervalului este $\xi_1 = \frac{1}{2}$ şi $P_3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} < 0$ $P_3(1) = 1 > 0$

$\Rightarrow$ rădăcina căutată este în intervalul $\left(\frac{1}{2},1\right)$

Mijlocul acestui nou interval este $\xi_2 = \frac{3}{4}$ şi $P_3\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{11}{64} > 0$ $P_3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} < 0$

$\Rightarrow$ rădăcina căutată este în intervalul $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$

Procesul poate continua şi obţinem un şir de intervale deschise cu lungimi din ce în ce mai mici. Cu fiecare pas eroarea absolută în stabilirea rădăcinii scade.

Teorema 2 (a valorilor intermediare)**:**

Fie $f(x)$ o funcţie continuă pe un interval închis $[a,b]$ şi fie $f(a) = A$ şi $f(b) = B$. Dacă C este orice număr dintre A şi B, atunci există cel puţin un punct $\alpha \in (a,b)$ astfel încât $f(\alpha) = C$. Cu alte cuvinte, dacă $f(x)$ este continuă pe $[a,b]$ atunci ia toate valorile intermediare dintre $f(a)$ şi $f(b)$, adică funcţia are proprietatea lui Darboux.

Demonstraţie:

Considerăm funcţia $\varphi(x) = f(x) - C$ şi fixăm $A < B$ şi $A < C < B$. Funcţia $\varphi(x)$ este continuă pe $[a,b]$ şi

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0$$

$$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0$$

$\overset{Teorema 1}{\Rightarrow}$ $\exists \alpha \in (a,b)$ atfel încât $\varphi(\alpha) = f(\alpha) - C = 0$ $\Rightarrow$ $f(\alpha) = C$

Interpretare geometrică: Este evidenţiată în figura 1.35.

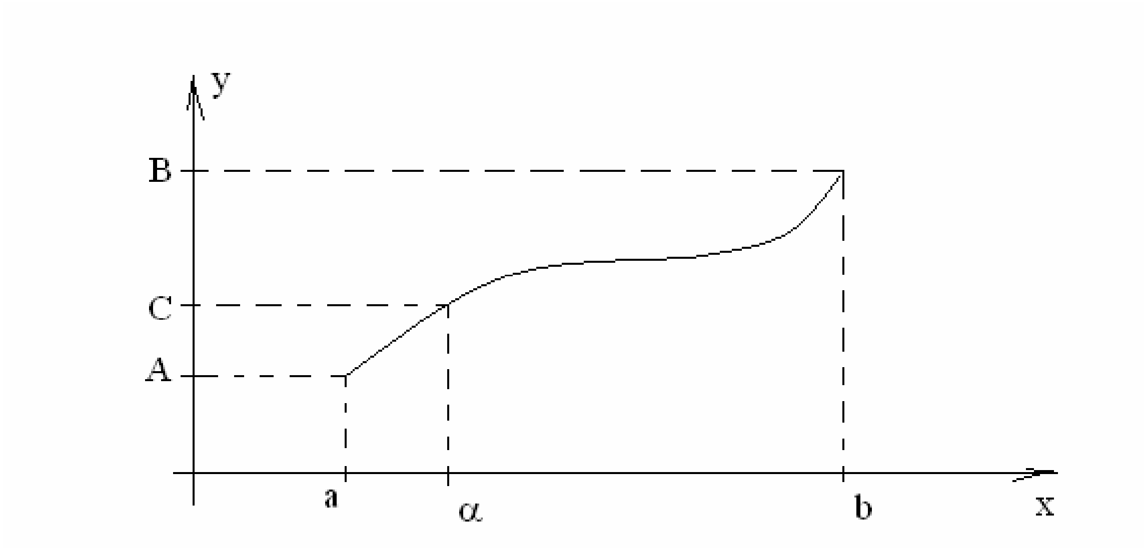


Figura 1.35

Teorema 3 Dacă $f(x)$ este o funcție continuă pe un interval închis $[a,b]$, atunci $f(x)$ este mărginită pe intervalul închis $[a,b]$, adică există un număr $K>0$ astfel încât

$$|f(x)| \leq K, \quad \forall x \in [a,b]$$

Observație: Ipoteza de continuitate pe interval *închis* este foarte importantă în enunțul acestei teoreme. De exemplu, funcția $f(x)=\frac{1}{x}$, $x \in (0,1]$ este continuă pe $(0,1]$ dar nu este mărginită pe $(0,1]$.

Teorema 4 Dacă $f(x)$ este o funcție continuă pe un interval închis $[a,b]$, atunci $f(x)$ își atinge infimum şi supremum pe $[a,b]$, adică $\exists \xi, \eta \in [a,b]$ astfel încât

$$f(\xi) = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$$

$$f(\eta) = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

În această situație $f(\xi) \leq f(x) \leq f(\eta)$, $\forall x \in [a,b]$.

Pentru a sublinia importanța ipotezelor din această teoremă, considerăm următoarele exemple:

Exemple:

1. $f(x)=x$, $x\in(0,1)$

$f(x)=x$ continuă pe $(-1,1)$

Nu-şi atinge supremum $\sup\limits_{x\in(-1,1)} x=1$, adică nu există $x_0\in(-1,1)$ astfel încât $f(x_0)=1$. Analog, nu-şi atinge infimum $\inf\limits_{x\in(-1,1)} x=-1$.

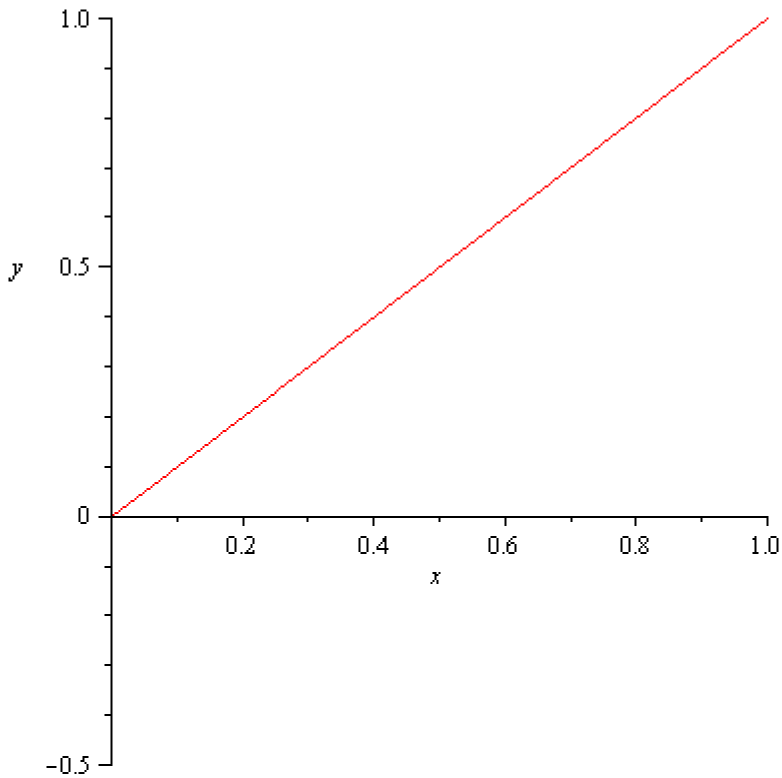


Figura 1.36

2. $f(x)=x-[x],\ x\in[0,1]$

Supremum $\sup\limits_{x\in[0,1]} f(x)=1$ nu este atins pe $[0,1]$ deoarece funcția nu este continuă pe $[0,1]$.

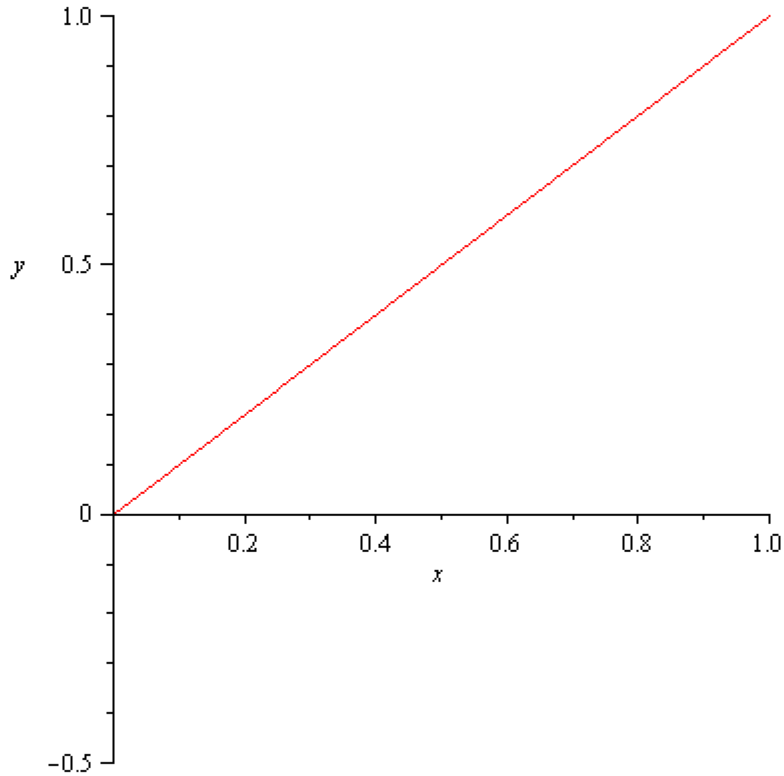


Figura 1.37

1.15 Continuitate uniformă

Funcțiile continue pe un interval închis au proprietatea de continuitate uniformă.

Fie $f(x)$ o funcție continuă pe intervalul (a,b). Atunci, pentru orice $x_0 \in (a,b)$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta > 0$ astfel încât $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pentru $\forall x \in (a,b)$ cu $|x - x_0| < \delta$.

Valoarea lui δ poate depinde atât de ε cât şi de x_0, adică $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$. Se poate ca pentru un $\varepsilon > 0$ dat, δ să fie diferit pentru diferiți $x_k \in (a,b)$ şi să nu existe un δ care să fie valabil pentru toți $x_k \in (a,b)$. Cerința de existență a unui $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ pentru toți $x_k \in (a,b)$ este mai puternică decât cerința de continuitate punctuală pentru $f(x)$ pe (a,b).

Definiție: O funcție $f(x)$ este *uniform continuă* pe (a,b) dacă pentru $\forall \varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

pentru $\forall x', x'' \in (a,b)$ cu $|x' - x''| < \delta$.

Cu simboluri logice definiția precedentă se rescrie:

$f(x)$ uniform continuă pe $(a,b) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall x', x'' \in (a,b)$, $|x' - x''| < \delta$ $\Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Exemplu: $f(x) = x$ este uniform continuă pe $\mathbb{R}$.
Intr-adevăr, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon$, $\forall x', x'' \in (a,b)$, $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Observație: Dacă o funcție $f(x)$ este uniform continuă pe (a,b), atunci aceasta este continuă şi punctual pe (a,b). Reciproca nu este adevărată.

Exemple:

1. $f(x)=x^2$ este continuă pe $\mathbb{R}$ dar nu este uniform continuă pe $\mathbb{R}$.

Pentru a arăta că *f* nu este uniform continuă pe $\mathbb{R}$, va trebui să arătăm că există $\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall \delta(\varepsilon) > 0$, există $x', x'' \in \mathbb{R}$ cu proprietățile:

$$|x'-x''| < \delta \quad \text{şi} \quad |f(x')-f(x'')| > \varepsilon$$

Fie $\varepsilon = \frac{1}{2}$ şi $\delta > 0$ oarecare. Observăm că dacă

$$x' = \sqrt{n+1} \quad \text{şi} \quad x'' = \sqrt{n}$$

$$|x'-x''| = \left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right| = \left|\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Această distanță, prin alegerea lui *n*, poate fi făcută mai mică ca orice $\delta > 0$.

$$|f(x')-f(x'')| = \left|x'^2 - x''^2\right| = |n+1-n| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \forall n$$

În concluzie, $\forall \varepsilon > 0$, de exemplu

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, \forall \delta > 0, \exists x' = \sqrt{n+1}, x'' = \sqrt{n} \text{ cu } |x'-x''| < \delta \text{ si } |f(x')-f(x'')| < \varepsilon$$

Şi $f(x)=x^2$ nu este uniform continuă pe $\mathbb{R}$,

Metoda a-II-a

Într-adevăr, fie *p* un număr natural, şi x', x'' două puncte simetrice față de *p* cu distanța dintre ele egală cu $\varepsilon/2$. Atunci,

$$|f(x')-f(x'')| = |x'-x''||x'+x''| = 2|x'-x''|\left|\frac{x'+x''}{2}\right| = 2\frac{\varepsilon}{2}p = p\varepsilon$$

Există puncte oricât de apropiate încât distanța dintre valorile funcției să depăşească orice număr pozitiv, deoarece $p\varepsilon$ ia valori oricât de mari, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ fixat.

2. $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$

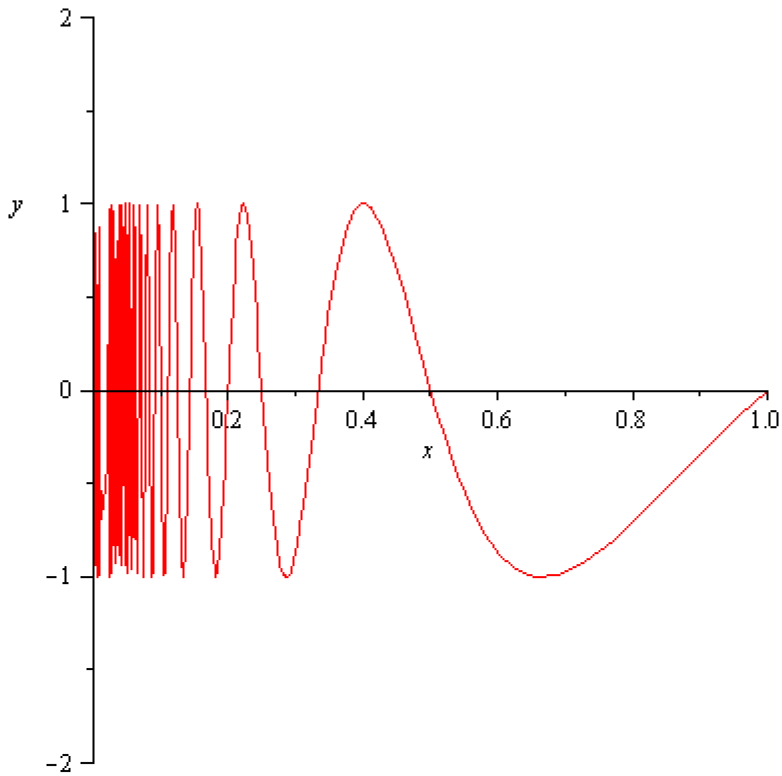


Figura 1.38 $f(x) = \sin(\dfrac{\pi}{x})$

Această funcție este continuă pe $(0,1)$, dar nu este uniform continuă pe $(0,1)$.

Într-adevăr, fie $x_n' = \dfrac{1}{n}$ şi $x_n'' = \dfrac{2}{2n+1}$.

$$|x_n' - x_n''| = \left|\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}\right| = \frac{1}{n(2n+1)}$$

Prin alegerea lui *n*, această diferență poate fi făcută mai mică decât orice $\delta > 0$. Dar

$$|f(x_n') - f(x_n'')| = \left|\sin n\pi - \sin\frac{\pi}{2}(2n+1)\right| = 1 > \varepsilon\text{, pentru } \forall \varepsilon < 1$$

În concluzie, $\forall \varepsilon > 0$, de exemplu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ şi $\forall \delta > 0$ există punctele $x_n', x_n'' \in (0,1)$ astfel încât $|x' - x''| < \delta$ şi $|f(x') - f(x'')| > \varepsilon$. Cu definiția $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ nu este uniform continuă pe $(0,1)$.

Trecerea de la continuitatea punctuală, la continuitatea uniformă se face cu teorema următoare.

Teoremă: Dacă o funcție $f(x)$ este continuă pe un interval închis $[a,b]$, atunci funcția este uniform continuă pe $[a,b]$.

Exemplu: $f(x) = x^2$ este uniform continuă pe $[a,b]$.

$f(x)$ uniform continuă pe $[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) = ?$, $\forall x', x'' \in [a,b]$, $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |f(x') - f(x'')| = |x'^2 - x''^2| = |(x' - x'') \cdot (x' + x'')| = |x' - x''| \cdot |x' + x''|$$

Deoarece,

$$0 \le |x'| \le \max\{|a|, |b|\} \overset{not}{=} M$$

$$0 \le |x''| \le \max\{|a|, |b|\} \overset{not}{=} M$$

$$|x' + x''| \le |x'| + |x''| \le 2M$$

$$\Rightarrow |f(x') - f(x'')| = |x' - x''| \cdot |x' + x''| \le |x' - x''| \cdot 2M < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x' - x''| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Intr-adevăr, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2M}$, a.î. $\forall x', x'' \in [a,b]$, $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Exercițiu: Să se studieze continuitatea uniformă a funcției $f(x) = \sin x^2$ pe $\mathbb{R}$.

1.16 Infinitezimali. Comparații

Definiții: Fie $\alpha(x)$ şi $\beta(x)$ infinitezimali pentru $x \to x_0$. Atunci:

a) $\alpha(x)$ este un *infinitezimal de ordin mai mare* decât $\beta(x)$ dacă

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

Notație: $\alpha(x) = o(\beta(x)), x \to x_0$

Ințelegem că $o(\beta(x)), x \to x_0$ este un infinitezimal de ordin mai mare în x_0 decât infinitezimalul $\beta(x)$ în x_0.

Exemplu: $\alpha(x) = x^2 \quad \beta(x) = x$ infinitezimali pentru $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$$

Deci $\alpha(x) = o(\beta(x)), x \to 0$ sau $x^2 = o(x), x \to 0$

b) $\alpha(x)$ şi $\beta(x)$ sunt *infinitezimali de acelaşi ordin* dacă

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$$

Exemplu: $\alpha(x) = 3x \quad \beta(x) = x$ infinitezimali pentru $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{x} = \lim_{x \to 0} 3 = 3$$

c) $\alpha(x)$ şi $\beta(x)$ sunt *infinitezimali incomparabili* dacă

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \text{ nu există}$$

Exemplu: $\alpha(x) = x\sin\frac{1}{x}$ $\beta(x) = x$ infinitezimali pentru $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} \quad \text{nu există}$$

d) $\alpha(x)$ este un *infinitezimal de ordinul m* (*m* întreg pozitiv), relativ la infinitezimalul $\beta(x) = x - x_0$ pentru $x \to x_0$, dacă

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^m} = B \neq 0$$

Exemplu: $\alpha(x) = 3\sin^2 x$ este un infinitezimal de ordinul $m = 2$ relativ la $\beta(x) = x$ pentru $x \to 0$ deoarece

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^2 x}{x^2} = 3$$

Infinitezimali echivalenți

Infinitezimalii $\alpha(x)$ şi $\beta(x)$ pentru $x \to x_0$ se numesc *echivalenți* dacă

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

Notație: $\alpha(x) \sim \beta(x), x \to x_0$

Infinitezimalii echivalenți $\alpha(x)$ şi $\beta(x)$ se numesc şi *egali asimptotic* pentru $x \to x_0$.

Proprietăți: Fie $\alpha(x), \beta(x)$ şi $\gamma(x)$ infinitezimali pentru $x \to x_0$. Atunci:

1. $\alpha(x) \sim \alpha(x), x \to x_0$
2. dacă $\alpha(x) \sim \beta(x) \Rightarrow \beta(x) \sim \alpha(x), x \to x_0$
3. dacă $\alpha(x) \sim \beta(x), \beta(x) \sim \gamma(x) \Rightarrow \alpha(x) \sim \gamma(x), x \to x_0$

Adică, relația de echivalență este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

Exemple:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin x \sim x, x \to 0$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln(1+x) \sim x, x \to 0$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad tgx \sim x, x \to 0$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arc\sin x}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad arc\sin x \sim x, x \to 0$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctgx}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad arctgx \sim x, x \to 0$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$

Într-adevăr, cu schimbarea de variabilă $y = a^x - 1$, $x = \dfrac{\ln(1+y)}{\ln a}$ şi

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\frac{\ln(1+y)}{\ln a}} = \lim_{y \to 0} \frac{\ln a}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = \ln a$$

$\Rightarrow \; a^x - 1 \sim x \ln a, x \to 0$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1 \; \Rightarrow \; e^x - 1 \sim x, x \to 0$

1.17 Numere complexe

Un număr complex are forma algebrică:

$$z = x + iy$$

unde x şi y sunt numere reale arbitrare iar i este unitatea imaginară astfel încât $i^2 = -1$.

Numerele x şi y se numesc parte reală şi respectiv parte imaginară a numărului complex $z = x + iy$.

Notaţii: $x = \operatorname{Re} z \quad y = \operatorname{Im} z$

Două numere complexe $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$ sunt egale $z_1 = z_2$ dacă şi numai dacă $x_1 = x_2$ şi $y_1 = y_2$.

Operaţii cu numere complexe

a) *suma* numerelor complexe $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$ este numărul complex

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Proprietăţi:

-comutativitate $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
-asociativitate $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

b) *diferenţa* numerelor complexe. Oricare ar fi numerele complexe $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$, există numărul complex z astfel încât $z_1 = z + z_2$. Numărul z se numeşte *diferenţa* $z_1 - z_2$ şi

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

c) *produsul* numerelor complexe $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$ este numărul complex

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Proprietăţi:

-comutativitate $z_1 z_2 = z_2 z_1$
-asociativitate $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
-distributivitate $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

d) *raportul* numerelor complexe. Oricare ar fi numerele complexe $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_2 \neq 0$, există numărul complex z astfel încât $z_1 = z_2 z$. Numărul z se numeşte *raportul* z_1 / z_2 şi deoarece $z_1 = z_2 z$ avem

$$x_1 = x_2 x - y_2 y$$
$$y_1 = x_2 y + x y_2$$

Rezolvăm sistemul cu necunoscutele *x, y*:

$$\begin{cases} x_2 x - y_2 y = x_1 \\ y_2 x + x_2 y = y_1 \end{cases}$$

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \qquad y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$
$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Fie numărul $z = x + iy$. Atunci, $\bar{z} = x - iy$ este *conjugatul complex* al acestuia.

Proprietăți:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

2. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4. $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$

Forma trigonometrică şi exponențială a numerelor complexe

Numărul complex $z = x + iy$ poate fi reprezentat în planul *xy* printr-un punct *M* cu coordonatele (x, y) sau prin vectorul de poziție cu originea în $O(0,0)$ şi vârful în $M(x, y)$. Planul *xy* se numeşte *plan complex*. Axa *Ox* se numeşte *axă reală*, iar axa *Oy* *axă imaginară.*

Pentru a localiza punctul *M* în planul complex, este convenabil să utilizăm coordonatele polare (r, θ) cu *r* lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}$ şi θ unghiul dintre vectorul $\overrightarrow{OM}$ şi axa *x*.

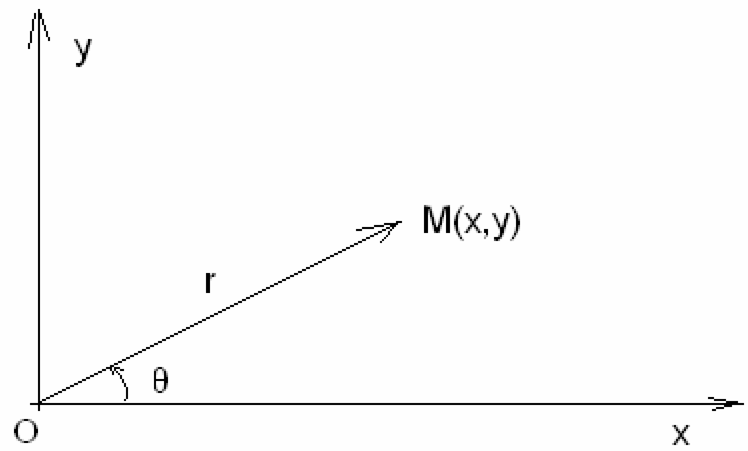


Figura 1.39

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

Forma trigonometrică a numărului complex este

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad z \neq 0$$

Modulul şi *argumentul* numărului complex *z* sunt:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \geq 0$$

$$\theta = Argz = \arg z + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

unde *arg z* este *argumentul principal*, şi prin convenţie $-\pi < \arg z \leq \pi$ cu:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & x > 0 \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, & x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, & x < 0, y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Observație: Argumentul numărului complex $z = 0$ este nedefinit, iar modulul acestuia este zero.

Numerele complexe z_1 şi z_2 sunt egale $\Leftrightarrow$ modulele celor două numere sunt egale iar argumentele acestora sunt fie egale fie diferă printr-un multiplu întreg de 2π, adică

$$|z_1| = |z_2| \quad \text{şi} \quad Argz_1 = Argz_2 + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$$

Exemplu:

Calculați modulul şi argumentul numărului complex:

$$z = -\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}$$

$$|z| = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}} = 1$$

$$x = -\sin\frac{\pi}{8} < 0 \qquad\qquad y = -\cos\frac{\pi}{8} < 0$$

$$\arg z = -\pi + arctg\frac{y}{x} = -\pi + arctg\left(ctg\frac{\pi}{8}\right) = -\pi + arctg\left(tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right) =$$

$$= -\pi + arctg\left(tg\frac{3\pi}{8}\right) = -\pi + \frac{3\pi}{8} = -\frac{5\pi}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \arg z = -\frac{5\pi}{8} \qquad Argz = -\frac{5\pi}{8} + 2k\pi,\ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Corespondența dintre numerele complexe şi vectorii din plan ne permite să interpretăm suma şi diferența numerelor complexe ca o sumă şi diferență de vectori.

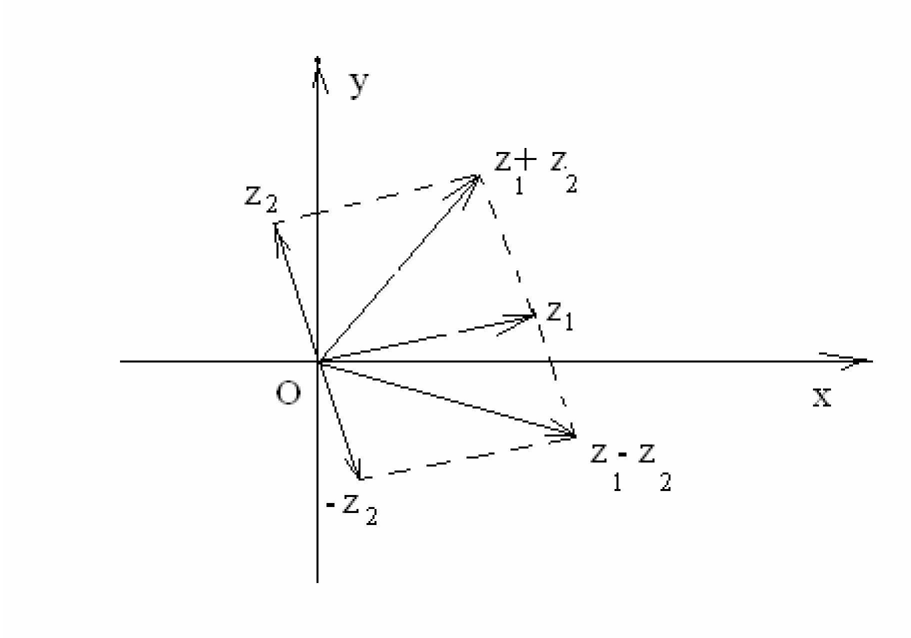


Figura 1.40

Proprietăți:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$
$$|z_1 - z_2| \geq \left||z_1| - |z_2|\right|$$

Formula lui Euler

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

ne permite să scriem un număr complex în *formă exponențială*

$$z = re^{i\theta}$$

Este de preferat să scriem numerele complexe în formă trigonometrică și exponențială atunci când dorim să înmulțim și să împărțim numere complexe.

Dacă

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

atunci

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Înmulțirea numerelor complexe presupune înmulțirea modulelor şi adunarea argumentelor.

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}, \quad r_2 \neq 0$$

Împărțirea numerelor complexe presupune împărțirea modulelor şi scăderea argumentelor.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

Radicalul unui număr complex

Fie z un număr complex.

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{de\ n\ ori}$$

Dacă scriem z în formă trigonometrică şi exponențială, atunci avem

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Dacă $r = 1$, vom obține *Formula lui Moivre*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Definiție: Numărul complex w se numeşte *rădăcina de ordinul n* a numărului complex z, dacă $w^n = z$ şi scriem $w = \sqrt[n]{z}$.

Pentru orice număr complex $z \neq 0$, rădăcina $w = \sqrt[n]{z}$ presupune n valori distincte. Intr-adevăr, fie

$$z = re^{i\theta} \quad \text{şi} \quad w = \rho e^{i\varphi}$$

$$\rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}$$

Deoarece, cele două numere complexe sunt egale, au loc

$$\rho^n = r \quad \text{şi} \quad n\varphi = \theta + 2k\pi$$

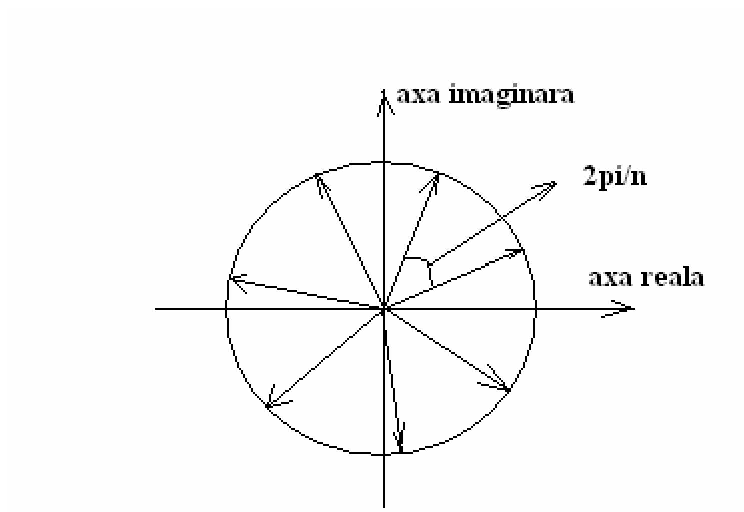
$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{şi} \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Toate rădăcinile au acelaşi modul, iar argumentele acestora diferă prin multipli întregi de $2\pi / n$. Rezultă că n rădăcini pot fi dispuse în planul complex, în vârfurile unui poligon regulat cu n laturi, înscris în cercul cu raza $\sqrt[n]{|z|}$ şi centrul în punctul $z = 0$.

Dacă considerăm valorile $0,1,2,\ldots,n-1$ pentru k, obţinem n numere complexe distincte

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$



Exemplu:

Să se calculeze $\sqrt[3]{i}$

$z = i$ în formă trigonometrică este

$$z = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$w_k = \sqrt[3]{i} = e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}}, \quad k = 0,1,2$$

$$w_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, \quad k = 0,1,2$$

$$w_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$w_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$w_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

Limita şirurilor de numere complexe

Fie $\{z_n\}$ un şir de numere complexe cu $z_n = x_n + iy_n$, unde $x_n \in \mathbb{R}$ şi $y_n \in \mathbb{R}$.

Definiție: Un număr complex z este limita şirului $\{z_n\}$ dacă $\forall \varepsilon > 0$ există un număr $N = N(\varepsilon)$ astfel încât

$$|z_n - z| < \varepsilon$$

pentru oricare $n > N$.

Notație: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$

Geometric, toți termenii şirului z_n cu $n > N$, puncte în planul complex, se află în interiorul cercului cu centrul în z şi rază ε.

Teoremă: Un şir $z_n = x_n + iy_n$ este convergent dacă şi numai dacă şirurile $\{x_n\}$ şi $\{y_n\}$ sunt convergente. În plus, are loc:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i\lim_{n\to\infty} y_n$$

Exerciții:

- □ Calculați modulul şi argumentul principal pentru:

$$z = 4 - 3i \qquad z = -\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$$

- □ Scrieți numărul complex $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ în formă trigonometrică.
- □ Calculați:

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8 \qquad R:1\mathrm{R}$$

- □ Calculați rădăcinile de ordinul 3 pentru $z = -1 + i$

Capitolul II

Calcul diferențial. Funcții de o singură variabilă

2.1 Noțiunea de derivată

Fie $y = f(x)$ o funcție definită pe (a,b) şi fie $x \in (a,b)$. Considerăm creşterea Δx a argumentului astfel încât $x + \Delta x \in (a,b)$. Creşterea Δx a argumentului va produce o creştere Δy a funcției $y = f(x)$:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \neq 0$$

Pentru *x* fixat, raportul precedent este o funcție de Δx adică

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(\Delta x)$$

Definiție: Dacă limita raportului $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pentru $\Delta x \to 0$ există, aceasta se numeşte *derivata funcției* $y = f(x)$ în punctul *x* şi se notează $f'(x)$ sau $y'(x)$ sau y'_x. Astfel, prin definiție avem:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Exemple:

1. $y = x^2$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \Delta x$ $\quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$

Atunci, $y = x^2$ are derivată $y'(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. $y = e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \Delta x$ $\quad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = e^x$

Atunci, $y = e^x$ are derivată $y'(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Altă definiție: Fie $f(x)$ o funcție definită în x_0 şi pe o vecinătate Ω a punctului x_0. Atunci

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

cu condiția ca această limite să existe.

Observație: Spunem că o funcție $f(x)$ are derivată pe (a,b) dacă derivata $f'(x)$ există în fiecare punct $x \in (a,b)$.

Interpretarea geometrică a derivatei

Considerăm graficul funcției $y = f(x)$, definită pe (a,b) şi alegem două puncte $M(x, f(x))$ şi $P(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ pe acest grafic. Considerăm apoi, dreapta care trece prin punctele *M* şi *P*.

Presupunem că punctul *P* se deplasează pe curba $y = f(x)$, spre *M*, adică $\Delta x \to 0$. Atunci dreapta *MP* se deplasează până ce devine tangentă la curba $y = f(x)$ în *M*, adică dreapta *MT*.

Panta *k* a dreptei *MP* este:

$$k = tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Panta $tg\alpha$, a tangentei *MT* la curba $y = f(x)$ în *M*, este limita pantei dreptei *MP* pentru $P \to M$ sau $\Delta x \to 0$, adică

$$tg\alpha = \lim_{P \to M} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

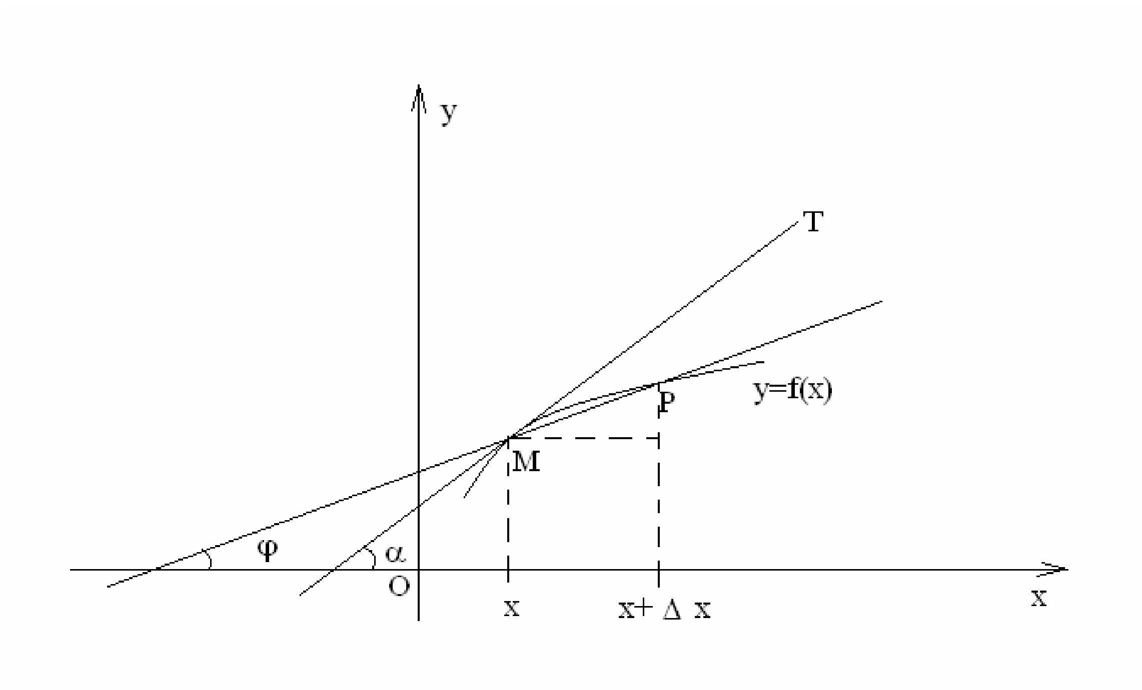


Figura 2.1

Derivata $f'(x)$ este panta tangentei la curba $y = f(x)$ în punctul de abscisă *x*.

Exerciții:

Pornind de la definiție, să se calculeze derivatele următoarelor funcții, în punctele specificate:

- ☐ $f(x) = \sqrt{5x+1} \qquad x_0 = 3$
- ☐ $f(x) = \ln\left(x^2 + 5x\right) \qquad x_0 = 1$
- ☐ $f(x) = tg\ x \qquad x_0 = \frac{\pi}{4}$

2.2 Ecuațiile tangentei şi normalei la o curbă

Tangenta Fie o curbă definită prin funcția $y = f(x)$ şi fie $M_0(x_0, f(x_0))$ un punct pe curbă. Presupunem că $f(x)$ are derivată în x_0 şi determinăm ecuația tangentei la curbă în punctul M_0.

Ecuația unei drepte care trece printr-un punct $M_0(x_0, y_0)$ este:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

unde *k* este panta dreptei.

Panta k_T a tangentei la curba $y = f(x)$ în punctul M_0 este egală cu derivata $f'(x_0)$, astfel ecuația tangentei ia forma:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{cu} \quad y_0 = f(x_0)$$

Normala la o curbă într-un punct dat este dreapta care trece prin punct şi este perpendiculară pe tangenta la curbă în acest punct. Perpendicularitatea implică o relație între panta k_N a normalei şi panta k_T a tangentei, anume:

$$k_N = -\frac{1}{k_T} \quad \text{sau} \quad k_N = -\frac{1}{f'(x_0)}, \quad f'(x_0) \neq 0$$

Ecuația normalei la curba $y = f(x)$ în punctul $M_0(x_0, y_0)$ este:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad f'(x_0) \neq 0$$

Observație: Dacă $f'(x_0) = 0$, ecuația normalei este $x = x_0$

Exemplu:

Scrieți ecuațiile tangentei şi normalei la curba $y = x^2$ în punctul $O(0,0)$.

$$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x \qquad f'(0) = 0$$

Ecuația tangentei:

$$y - 0 = 0(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = 0$$ şi coincide cu axa Ox

Ecuația normalei:

$x = 0$ şi coincide cu axa Oy

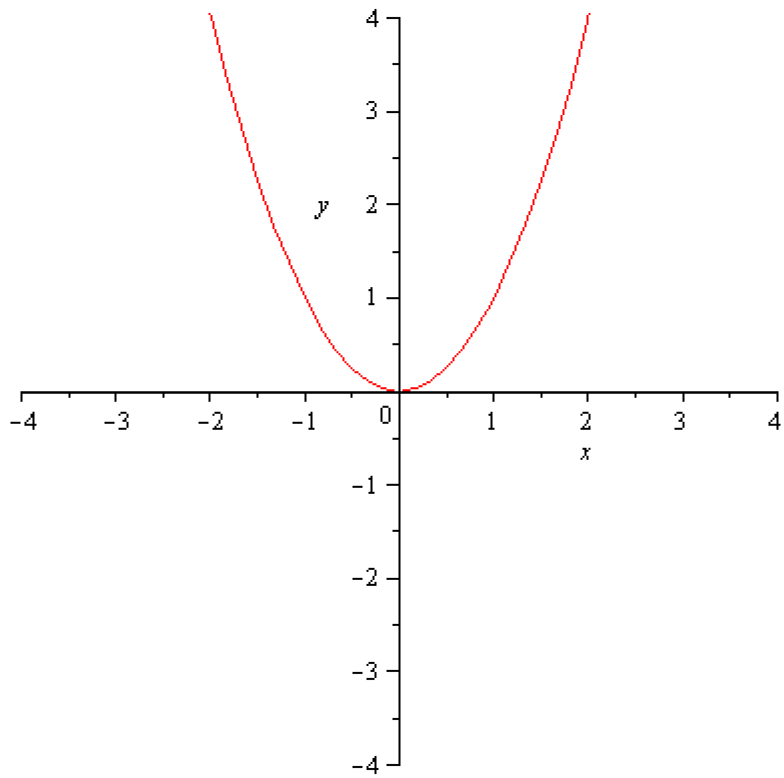


Figura 2.2 $f(x) = x^2$

Exerciții:

- Să se scrie ecuația tangentei la curba a cărei ecuație este $f(x) = \ln x + x^2 - 1$, în punctul (e, e^2).

□ Să se scrie ecuația normalelor la parabola care are ecuația $y = x^2 - 4x + 5$, în punctele de intersecție ale acesteia cu dreapta de ecuație $y = x + 1$.

2.3 O aplicație a derivatei în mecanică

Fie $s = s(t)$ legea mişcării rectilinii a unui punct material. Aceasta precizează distanța parcursă de punct funcție de timpul *t*. Fie

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$$

distanța parcursă de punctul material în intervalul de timp Δt.
Raportul $\Delta s / \Delta t$ defineşte *viteza medie* în intervalul Δt. *Viteza instantanee* a punctului material se defineşte ca limită a vitezei medii în intervalul Δt pentru $\Delta t \to 0$, adică

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$$

In concluzie, viteza $v(t)$ este egală cu derivata spațiului *s* în raport cu timpul *t*, adică $v(t) = s'(t)$.

Exemplu:

Considerăm legea mişcării rectilinii $s = t^2$, unde *s* este distanța în metri şi *t* este timpul în secunde. Calculați viteza la $t = 3s$.

$$v = s'(t) = 2t, \quad v(t) = 2t, \quad v(3) = 2 \cdot 3 = 6m/s$$

2.4 Derivate laterale

Derivata la dreapta $f'(x + 0)$ a funcției $y = f(x)$ în punctul *x* este:

$$f'(x+0)=\lim_{\Delta x\to 0, \Delta x>0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

iar derivata la stânga $f'(x-0)$ a funcției $y=f(x)$ în punctul x este:

$$f'(x-0)=\lim_{\Delta x\to 0, \Delta x<0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

cu condiția ca limitele să existe.

Proprietate: Pentru ca $f'(x)$ să existe este necesar şi suficient ca funcția $y=f(x)$ să aibă derivate laterale în punctul x şi acestea să coincidă, adică

$$f'(x+0)=f'(x-0)=f'(x)$$

Exemplu:

$$f(x)=|x|$$

Considerăm $x=0$ $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, \Delta x>0\\ -1, \Delta x<0\end{cases}$$

Derivatele laterale în $x=0$:

$$f'(0+0)=\lim_{\Delta x\to 0, \Delta x>0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=1$$

$$f'(0-0)=\lim_{\Delta x\to 0, \Delta x<0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=-1$$

Derivatele laterale sunt distincte. In consecință, $f(x)=|x|$ nu are derivată în $x=0$. Geometric, nu există tangentă la curba $y=|x|$ în punctul $O(0,0)$.

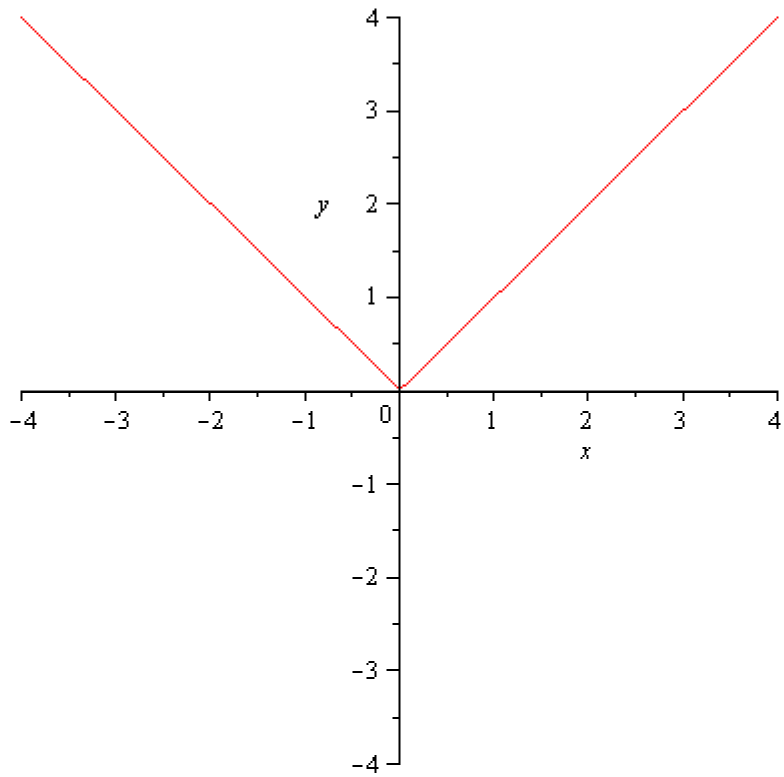


Figura 2.3 $f(x)=|x|$

Exerciții:

Să se studieze derivabilitatea următoarelor funcții:

$$f(x)=\begin{cases}\ln(1+2x), & x\in\left(-\frac{1}{2},0\right]\\ 2x, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+5x+2}, & x\in[0,2]\\ \frac{9}{8}x+\frac{7}{4}, & x\in(2,+\infty)\end{cases}$$

Fie $f(x)$ o funcție *continuă* în x_0. Spunem că $f(x)$ are *derivată infinită* în x_0, dacă în acest punct are loc:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\pm\infty$$

In această situație tangenta la curba $y = f(x)$ în punctul $(x_0, f(x_0))$ este perpendiculară pe axa *Ox*.

Exemplu:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

Considerăm $x = 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$$

Tangenta la curba $y = \sqrt[3]{x}$ în punctul $(0,0)$ coincide cu axa *Oy*.

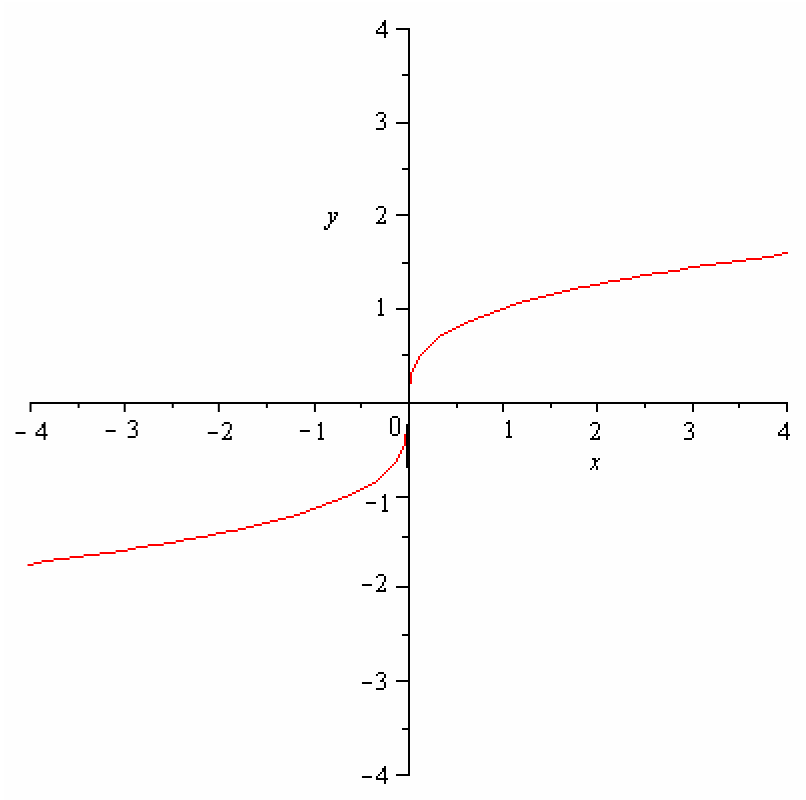


Figura 2.4 $f(x) = \sqrt[3]{x}$

De reținut: Dacă o funcție $f(x)$ are derivată finită în x_0, atunci există o tangentă la graficul $y = f(x)$ în punctul $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ şi ecuația acestei tangente este:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

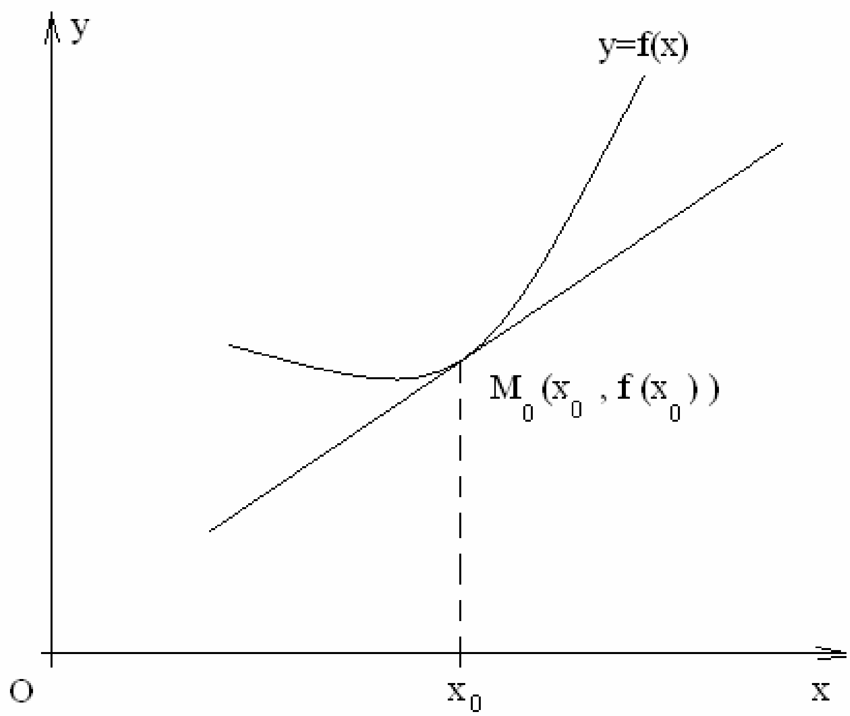


Figura 2.5

Definiție:

O funcție $f(x)$ este *netedă* pe (a,b) dacă $f(x)$ şi $f'(x)$ sunt continue pe (a,b).

Dacă o funcție $f(x)$ este continuă în x_0 şi are derivate laterale diferite în x_0, $f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)$, atunci în punctul $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ curba $y = f(x)$ nu admite tangentă. In această situație, curba $y = f(x)$ nu este netedă, iar prin punctul $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ trec două drepte, una tangentă la ramura stângă a curbei şi alta tangentă la ramura dreaptă a curbei. Punctul $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ se numeşte *punct unghiular*.

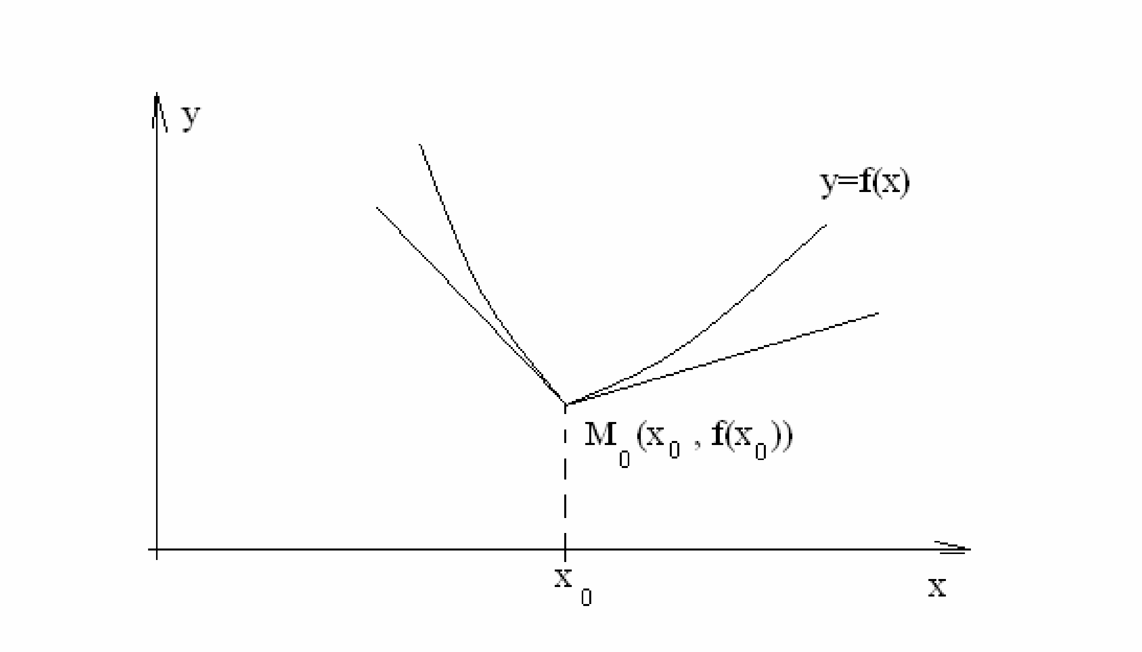


Figura 2.6

Exemplu: Funcția $y = |x|$ are un punct unghiular în $O(0,0)$

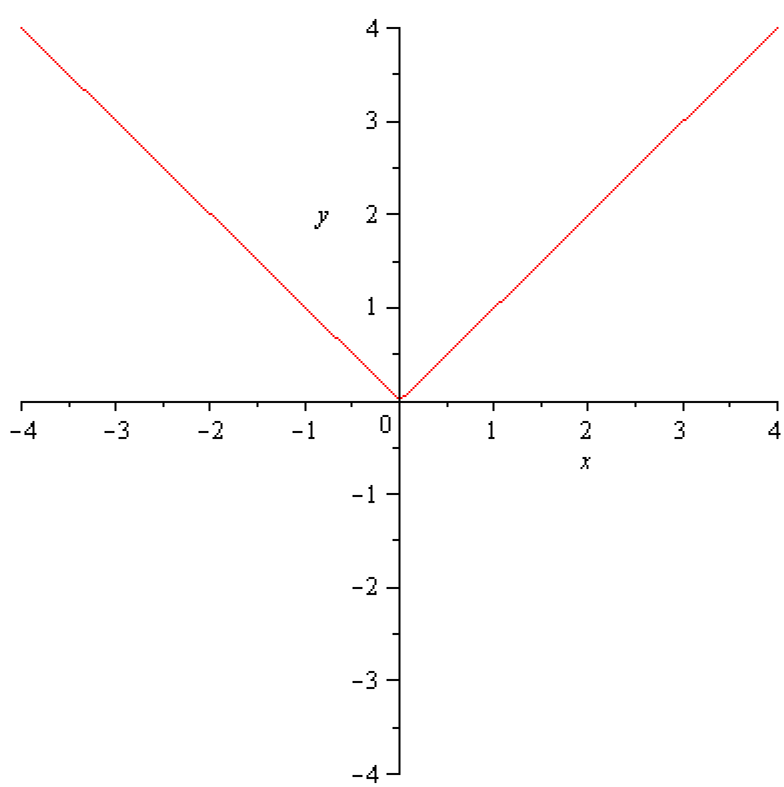


Figura 2.7 $f(x) = |x|$

Dacă o funcție $f(x)$ este continuă în x_0 şi are derivată infinită în x_0, putem distinge cazurile:

1) $f'(x_0)=+\infty$
2) $f'(x_0)=-\infty$
3) $f'(x_0-0)=-\infty \quad f'(x_0+0)=+\infty$
4) $f'(x_0-0)=+\infty \quad f'(x_0+0)=-\infty$

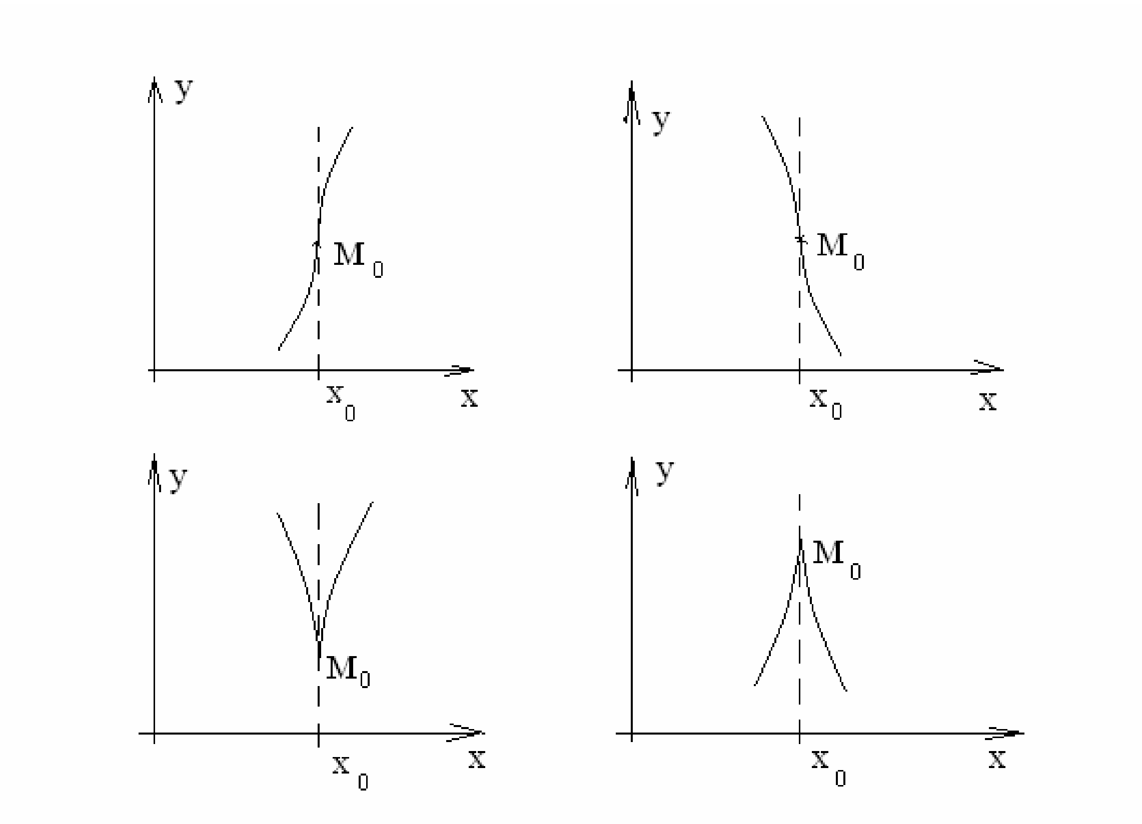


Figura 2.8

2.5 Funcții diferențiabile

Fie $f(x)$ o funcție definită pe (a,b) şi fie $x\in(a,b)$. Considerăm o creştere Δx a argumentului x astfel încât $x+\Delta x\in(a,b)$. Creşterea Δx a argumentului produce o creştere Δy pentru funcție:

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$$

Definiție: Funcția $f(x)$ se numeşte *diferențiabilă* în punctul $x \in (a,b)$ dacă creşterea funcției $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, corespunzătoare creşterii Δx admite o reprezentare de forma

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

unde A este un număr independent de Δx, dar în general dependent de x şi $\alpha(\Delta x) \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$.

Exemplu:

$$f(x) = x^2$$

Pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ şi $\forall \Delta x$

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x\Delta x$$

$$A = 2x \quad \alpha(\Delta x) = \Delta x$$

Cu definiția, $f(x) = x^2$ este diferențiabilă $\forall x \in \mathbb{R}$.

Teorema 1: Pentru ca o funcție $y = f(x)$ să fie diferențiabilă într-un punct x este necesar şi suficient ca funcția să aibă derivată finită $f'(x)$ în punctul x.

Demonstrație:

$\Rightarrow$ Considerăm $y = f(x)$ diferențiabilă în $x \Rightarrow$ o creştere Δx în x produce o creştere Δy a funcției care poate fi scrisă

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$$

unde A este o constantă pentru un x dat şi $\alpha(\Delta x) \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A = f'(x)$$

Deci, derivata funcției în punctul x există.

$\Leftarrow$ Considerăm că funcția are derivata $f'(x)$ în punctul $x \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Cu teorema 1 de la operații cu limite avem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$$

unde $\alpha(\Delta x) \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$. Atunci

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

Deoarece $f'(x)$ este independent de Δx și $\alpha(\Delta x) \to 0$ pentru $\Delta x \to 0 \Rightarrow$ funcția este diferențiabilă în x.

Observație: Această teoremă stabilește o corespondență unu-la-unu între noțiunea de funcție diferențiabilă într-un punct şi noțiunea de funcție cu derivată finită în acelaşi punct. In consecință, operația de calcul a derivatei unei funcții se numeşte şi diferențierea unei funcții.

Continuitatea funcțiilor diferențiabile

Teorema 2: Dacă o funcție $y = f(x)$ este diferențiabilă într-un punct *x*, atunci funcția este continuă în punctul *x*.

Demonstrație:

Considerăm $y = f(x)$ diferențiabilă în $x \Rightarrow$ o creştere Δx în *x* produce o creştere Δy a funcției care poate fi scrisă

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

unde *A* este o constantă pentru un *x* dat şi $\alpha(\Delta x) \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$.

$\Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, adică funcția este continuă în *x*.

Reciproca nu este adevărată. Dacă $f(x)$ este continuă în *x*, nu este necesar să fie şi difereţiabilă în *x*.

Exemplu: $f(x) = |x|$ este continuă în $x = 0$, dar nu are derivată în $x = 0$, deci nu este nici diferențiabilă în acest punct.

Diferențiala

Fie $y = f(x)$ o funcție diferențiabilă în punctul *x*. Atunci o creştere Δx în *x* produce o creştere Δy a funcției care poate fi scrisă

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

unde $\alpha(\Delta x) \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$.

Dacă $A \neq 0$, partea liniară $A\Delta x$ a lui Δy se numeşte *diferențiala* lui $y = f(x)$ şi se notează cu *dy* sau $df(x)$

$$dy = A\Delta x$$

$A\Delta x$ este *partea liniară principală* a lui Δy, deoarece $\alpha(\Delta x)\Delta x$ este un infinitezimal de ordin mai mare decât $A\Delta x$ pentru $\Delta x \to 0$.

Dacă $A = 0$, diferențiala este nulă.

Din demonstrația teoremei 1 avem $A = f'(x)$, ceea ce duce la

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Observație: Diferențiala unei variabile independente *x* este

$$dx = \Delta x$$

Atunci, diferențiala funcției $y = f(x)$ se poate scrie:

$$dy = f'(x)dx$$

Din această scriere rezultă imediat *notația Leibniz* pentru derivată în forma unui raport de două diferențiale:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Definiție: Spunem că o funcție $y = f(x)$ este diferențiabilă pe (a,b) dacă funcția este diferențiabilă în orice punct din (a,b).

Interpretarea geometrică a diferențialei

Fie $y = f(x)$ o funcție diferențiabilă pe (a,b). Desenăm tangenta la curba $y = f(x)$ într-un punct *M* de abscisă *x* şi considerăm un punct M_1 cu abscisa *x+dx*. Desigur, $f'(x) = tg\varphi$. Considerăm triunghiul MPQ, în care

$$PQ = MP \cdot tg\varphi = f'(x)dx = dy$$

Astfel, diferențiala $dy = f'(x)dx$ a funcției $y = f(x)$ este creşterea ordonatei tangentei la curba $y = f(x)$ în *M* când *x* are creşterea *dx*.

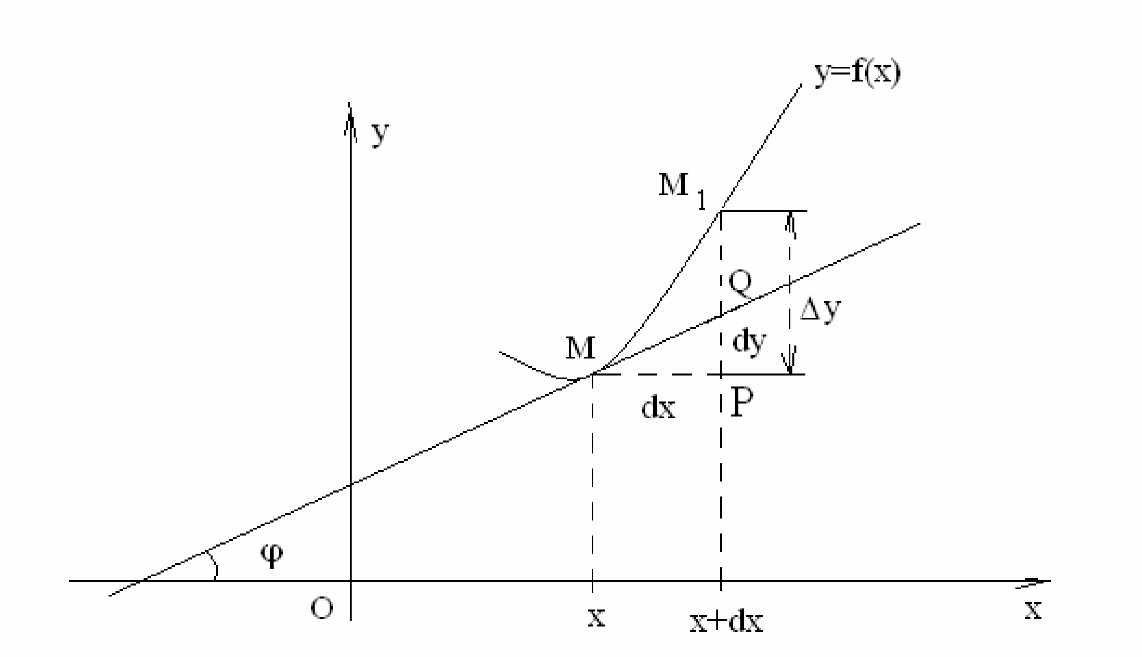


Figura 2.9

2.6 Reguli de diferențiere

□ **Derivata unei funcții constante**

Funcția $y = C = ct$, $\forall x \in (a,b)$ are derivata $y' = 0$, $\forall x \in (a,b)$.
Într-adevăr, $\forall x \in (a,b)$, $\forall \Delta x$ astfel încât $x + \Delta x \in (a,b)$, are loc

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0, \quad \forall x \in (a,b)$$

În concluzie, $\left(C\right)' = 0$ şi $dC = 0$

□ Derivata sumei de funcții

Fie $u\left(x\right)$ şi $v\left(x\right)$ două funcții diferențiabile în *x*. Atunci, suma $y\left(x\right) = u\left(x\right) + v\left(x\right)$ este şi ea diferențiabilă în *x* şi are loc:

$$y'\left(x\right) = \left(u\left(x\right) + v\left(x\right)\right)' = u'\left(x\right) + v'\left(x\right)$$
$$d\left(u + v\right) = du + dv$$

Demonstrație:

Cu definiția derivatei avem:

$$\left(u+v\right)'\left(x\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u+v)(x+\Delta x) - \left(u+v\right)(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - u(x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right]$$

$$\left(u+v\right)'\left(x\right) = u'(x) + v'(x)$$

Rezultatul poate fi extins la un număr finit de funcții diferențiabile.

Exemplu:

$$y = e^x + x^2 + 2$$

□ Derivata produsului de funcții

Fie $u\left(x\right)$ şi $v\left(x\right)$ două funcții diferențiabile în *x*. Atunci, produsul $y\left(x\right) = u\left(x\right) \cdot v\left(x\right)$ este şi el diferențiabil în *x* şi are loc:

$$\left(u\left(x\right) \cdot v\left(x\right)\right)' = u'\left(x\right) \cdot v\left(x\right) + u\left(x\right) \cdot v'\left(x\right)$$

$$d\left(u\cdot v\right)=vdu+udv$$

Demonstrație:

Cu definiția derivatei avem:

$$\left(u\cdot v\right)'\left(x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u\cdot v)(x+\Delta x)-\left(u\cdot v\right)(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)+u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x+\Delta x)\cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\left(\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\right)v(x)+u(x+\Delta x)\left(\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right)\right]$$

Cum limita sumei este suma limitelor, are loc:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\right)v(x)+\lim_{\Delta x\to 0}u(x+\Delta x)\left(\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right)$$

$$\left(u\cdot v\right)'\left(x\right)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

Unde, s-a folosit

$$\lim_{\Delta x\to 0}u\left(x+\Delta x\right)=u\left(x\right)$$

datorită continuității funcției $u(x)$. Demonstrația regulii de derivare a produsului presupune derivabilitatea funcțiilor u şi v, ceea ce implică continuitatea acestora.

Exemplu:

$$y=\left(x^2-2\right)\left(e^x+2\right)$$

Observație: Un factor constant iese în fața derivatei şi diferențialei, adică

$$\left(Cu\left(x\right)\right)'=Cu'\left(x\right)$$
$$d\left(Cu\left(x\right)\right)=Cdu$$

Regula produsului poate fi generalizată la un număr finit de funcții diferențiabile:

$$\left(u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)\right)' = u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x) + \ldots + u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$$

□ **Derivata raportului de funcții**

Fie $u(x)$ şi $v(x)$ două funcții diferențiabile în x şi $v(x) \neq 0$ în x. Atunci, raportul $y(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ este şi el diferențiabil în x şi are loc:

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, \quad v(x) \neq 0$$

Exemplu:

$$y = \frac{e^x - 1}{x^2 + 3}$$

2.7 Derivatele unor funcții elementare

□ Funcția exponențială $y = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$ definită $\forall x \in \mathbb{R}$

Pentru $\forall x$, $\forall \Delta x$, creşterea funcției este

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$$

$$\Rightarrow \quad \left(a^x\right)' = a^x \ln a$$

Caz particular: $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$

□ Funcția logaritmică $y = \ln x$, $(x > 0)$

Pentru $\forall x$, $\forall \Delta x$, astfel încât $x + \Delta x > 0$ creşterea funcției este

$$\Delta y = \ln\left(x + \Delta x\right) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{x \frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

Observație: $\log_a x = \log_a e \cdot \ln x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

$$\left(\log_a x\right)' = \log_a e \left(\ln x\right)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$$

□ Funcția putere $y = x^{\alpha}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$ definită $\forall x > 0$

Pentru $\forall x$, $\forall \Delta x$, creşterea funcției este

$$\Delta y = \left(x + \Delta x\right)^{\alpha} - x^{\alpha} = x^{\alpha}\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1\right]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} x^{\alpha} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\Delta x} = x^{\alpha} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{x \frac{\Delta x}{x}} = x^{\alpha} \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\alpha - 1}\alpha$$

Unde am folosit limita $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \alpha$

$$\Rightarrow \quad \left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha - 1}$$

□ Funcții trigonometrice $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$

Pentru $\forall x$, $\forall \Delta x$, creșterea funcției este

$$\Delta y = \sin\left(x + \Delta x\right) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sin x\right)' = \cos x$$

Similar, $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

$$\left(tg\ x\right)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\ \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

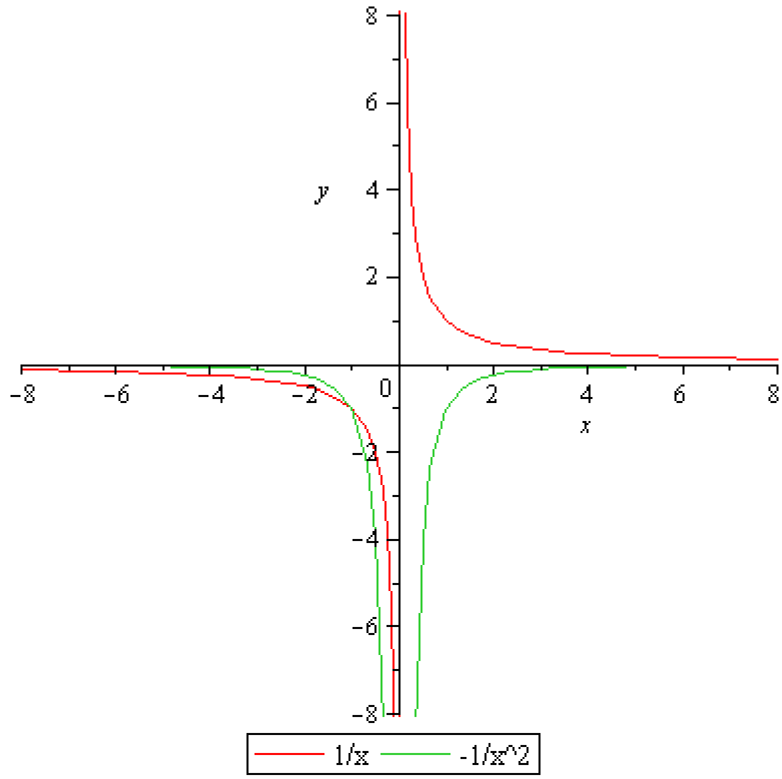
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(tg\ x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

Similar, $\left(ctg\ x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq n\pi$

Exercițiu:

Reprezentați grafic $f(x)=\dfrac{1}{x},\ \ x\neq 0$ şi $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.



Observație: Graficele funcțiilor $f(x)$ şi $f'(x)$ sunt diferite. Mai mult, $f(x)$ este funcție impară iar $f'(x)$ este funcție pară. În general, derivata unei funcții impare este o funcție pară şi vice-versa.

2.8 Derivatele funcțiilor compuse

Teorema 1: Fie $u=\varphi(x)$ o funcție diferențiabilă în x_0 şi fie $y=f(u)$ o funcție diferențiabilă în $u_0=\varphi(x_0)$. Atunci, funcția compusă $y=f[\varphi(x)]$ este diferențiabilă în x_0 şi are loc

$$\{f[\varphi(x)]\}_x'\Big|_{x=x_0}=f'(u_0)\varphi'(x_0) \qquad (1)$$

Observație: Egalitatea de mai sus poate fi scrisă şi în alte moduri

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \qquad \text{sau} \qquad y_x'=y_u'u_x' \qquad (2)$$

Exemple:

1) Calculați derivata funcției $y=e^{\sin x}$

y este o funcție compusă de x care poate fi scrisă în forma

$$y=e^{u(x)} \quad \text{cu} \quad u(x)=\sin x$$

$$\Rightarrow \qquad y_x'=\left(e^u\right)_u' u_x'=e^u\cos x=e^{\sin x}\cos x$$

2) Calculați derivata funcției $y=\ln|x|$, $x\neq 0$

y este o funcție pară definită pe $\mathbb{R}-\{0\}$

Dacă $x>0 \;\Rightarrow\; |x|=x \;\Rightarrow\; y=\ln x \;\Rightarrow\; y_x'=(\ln x)'=\frac{1}{x}, \quad x>0$

Dacă $x<0 \;\Rightarrow\; |x|=-x \;\Rightarrow\; y=\ln(-x)$

In această situație derivăm funcția compusă

$$y_x'=y_u'u_x'=\frac{1}{u}(-1)=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}, \quad x<0$$

In concluzie,

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \tag{3}$$

Observație: Teorema 1 este valabilă şi pentru compunerea unui număr finit de funcții. De exemplu, dacă

$$y = f(u), \quad u = \varphi(z) \quad \text{şi} \quad z = \psi(x) \tag{4}$$

Atunci derivata funcției compuse $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$ este

$$y'_x = y'_u u'_z z'_x \tag{5}$$

cu condiția ca derivatele implicate să existe.

Invarianța diferențialei

Dacă $y = f(u)$ este o funcție diferențiabilă de variabila independentă *u* atunci

$$dy = f'(u)du \tag{6}$$

unde $du = \Delta u$.

Fie $u = \varphi(x)$ o funcție diferențiabilă de variabilă independentă *x*. Atunci putem considera *y* ca o funcție compusă $y = f[\varphi(x)]$ de variabilă *x*. Putem exprima diferențiala funcției compuse astfel

$$dy = \{f[\varphi(x)]\}'_x dx \tag{7}$$

Cu teorema 1 de derivare a funcțiilor compuse avem

$$dy = f'(u)\varphi'(x)dx \tag{8}$$

Şi deoarece $\varphi'(x)dx = du$, obținem din nou relația (6)

$$dy = f'(u)du$$

De reținut Diferențiala unei funcții se exprimă cu aceeaşi formulă indiferent dacă argumentul funcției este o *variabilă independentă* sau este o *funcție de o altă variabilă*. Această proprietate se numeşte *invarianța formei de exprimare a diferențialei.*

In formula $dy = f'(u)du$, diferențiala *du* este egală cu o creştere arbitrară Δu a unei variabile independente *u* sau dacă *u* nu este variabilă independentă, adică $u = \varphi(x)$, atunci $du = \varphi'(x)dx$ este partea liniară a creşterii funcției $u = \varphi(x)$ şi este în general diferită de Δu .

Exerciții:

Calculați derivatele funcțiilor:

$$y = \left(x^2 - 2x + 3\right)^5$$

$$y = \sin^3 4x$$

$$y = \left(2a + 3bx\right)^2, \quad a,b \in \mathbb{R}$$

$$y = \sqrt[3]{a + bx^3}, \quad a,b \in \mathbb{R}$$

$$y = \cos\left(\alpha x + \beta\right), \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

$$y = \sqrt{xe^x + x}$$

$$y = x^2 10^{2x}$$

2.9 Diferențierea funcției inverse

Fie $y = f(x)$ o funcție definită pe $[a,b]$. Presupunem că domeniul de valori al funcției este $[\alpha,\beta]$. Mai mult, presupunem că fiecare punct $y \in [\alpha,\beta]$ este imaginea unui singur punct $x \in [a,b]$ astfel încât $f(x) = y$.

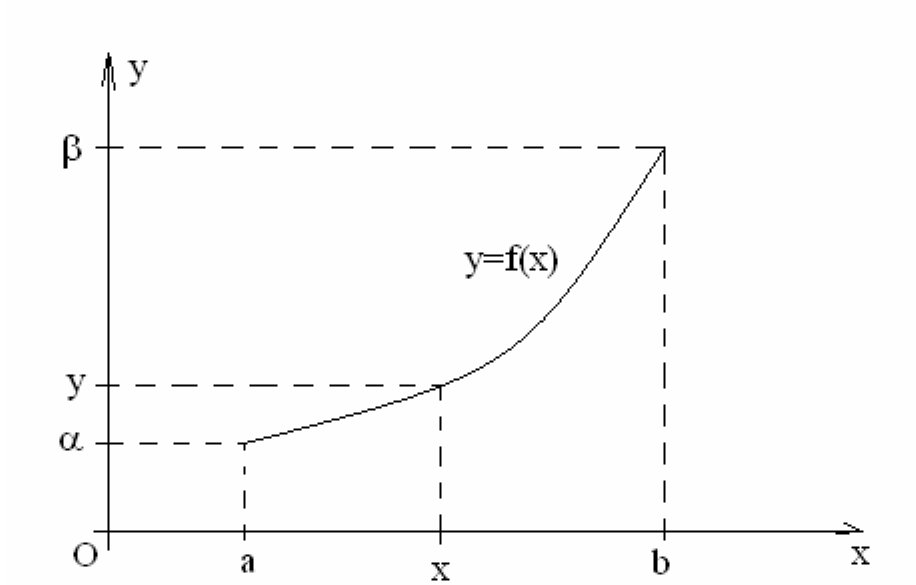


Figura 2.10

Atunci, putem defini funcția $x=\varphi(y)$ pe $[\alpha,\beta]$ care asociază la fiecare $y\in[\alpha,\beta]$ un $x\in[a,b]$ astfel încât $f(x)=y$. Funcția $x=\varphi(y)$ se numeşte *funcția inversă* a funcției $y=f(x)$.

Observație: Dacă $x=\varphi(y)$ este inversa funcției $y=f(x)$, atunci $y=f(x)$ este inversa funcției $x=\varphi(y)$ şi scriem

$$f\left[\varphi(y)\right]=y \qquad \text{şi} \qquad \varphi\left[f(x)\right]=x$$

Procedeu de determinare a funcției inverse:

Fie $y=f(x)$ o ecuație rezolvabilă în x astfel încât fiecare y este asociat cu exact un x. Atunci, ecuația $x=\varphi(y)$, defineşte pe x ca o funcție de y şi este inversa funcției $y=f(x)$.

Exemple:

1) Fie funcția $y=3x$ definită pe $[0,1]$. Atunci funcția $x=\dfrac{y}{3}$ definită pe $[0,3]$ este funcția inversă funcției date.

2)Fie funcția $y = x^3, x \in \mathbb{R}$. Funcția inversă este $x = \sqrt[3]{y}, y \in \mathbb{R}$.

Observație: Funcțiile $y = f(x)$ şi $x = \varphi(y)$ specifică aceeaşi curbă în planul *xy*. Dacă reprezentăm variabilele independente pe axa *x* în ambele cazuri, adică dacă reprezentăm funcțiile $y = f(x)$ şi $y = \varphi(x)$ în loc de $y = f(x)$ şi $x = \varphi(y)$, atunci graficele celor două funcții vor fi simetrice relativ la linia bisectoare din cadranul unu şi trei ale planului de coordonate.

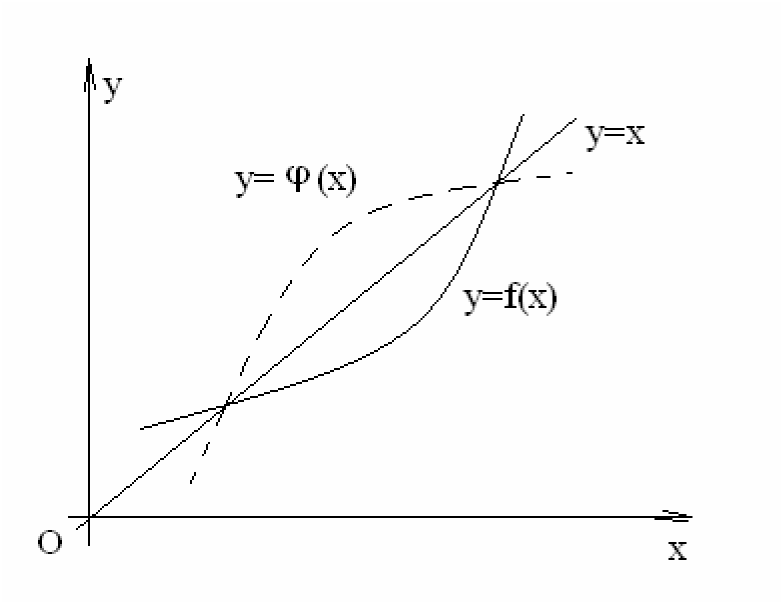


Figura 2.11

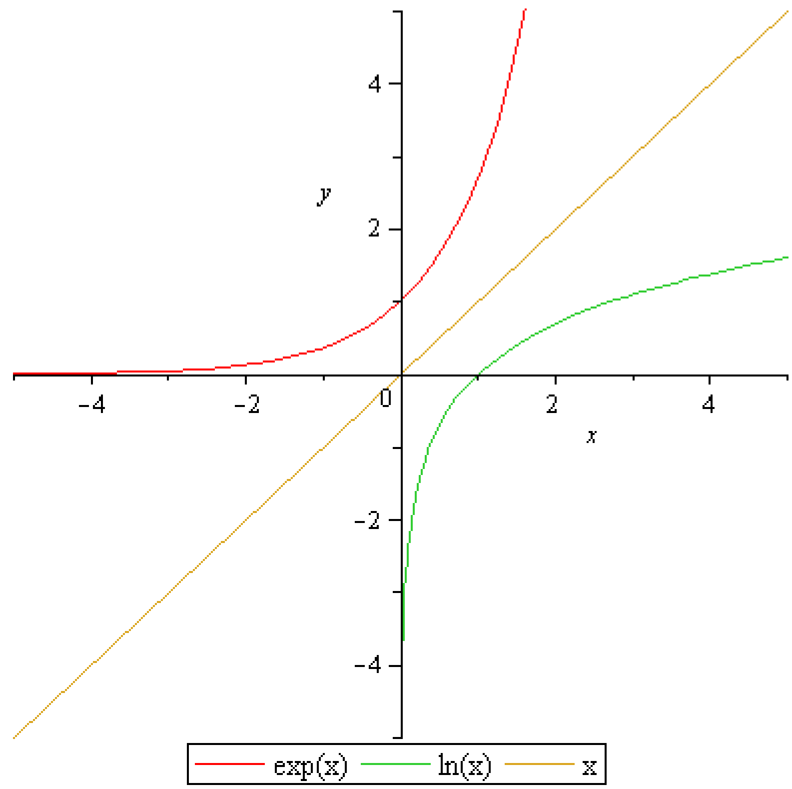
Exemplu:

Funcția $y = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ are ca funcție inversă pe $x = \ln y$, $y \in (0, +\infty)$

Dacă reprezentăm variabila independentă pe aceeaşi axă *Ox*, atunci funcția inersă este $y = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$, iar graficele sunt simetrice față de prima bisectoare.

Definiție: O funcție $y = f(x)$ este *strict crescătoare* pe $[a,b]$ dacă $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ cu $x_1 < x_2$, are loc $f(x_1) < f(x_2)$.

Exemplu: Funcția $y = x^3$ este crescătoare $\forall x \in \mathbb{R}$ (vezi figura 2.12).



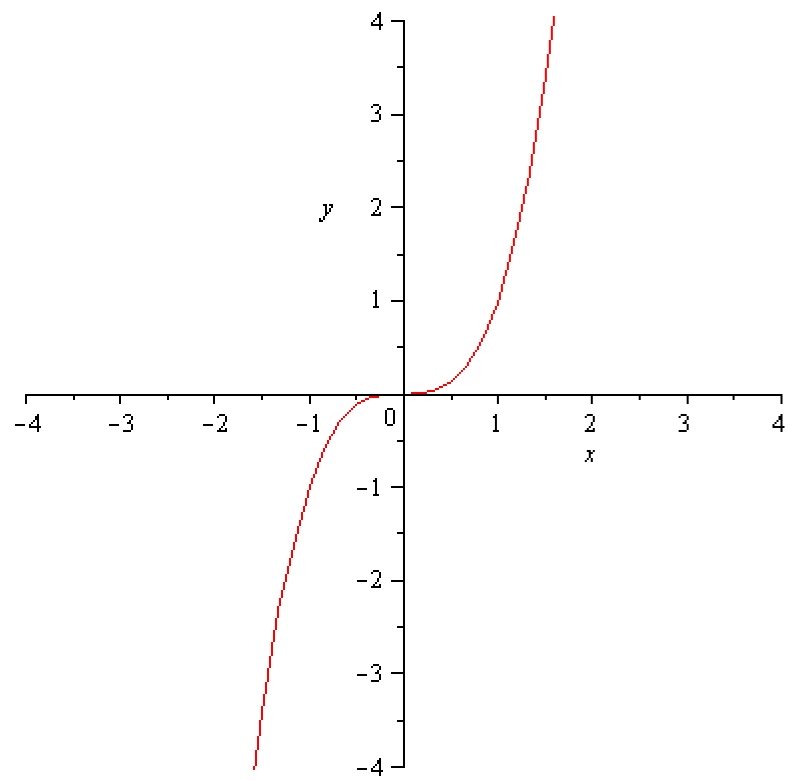


Figura 2.12 $f(x) = x^3$

Teorema 1: Fie $y = f(x)$ o funcție continuă şi strict crescătoare pe $[a,b]$ şi fie $\alpha = f(a)$ şi $\beta = f(b)$. Atunci $y = f(x)$ admite funcție inversă $x = \varphi(y)$ definită pe $[\alpha, \beta]$ şi mai mult $x = \varphi(y)$ este continuă şi strict crescătoare pe $[\alpha, \beta]$.

Interpretare geometrică:

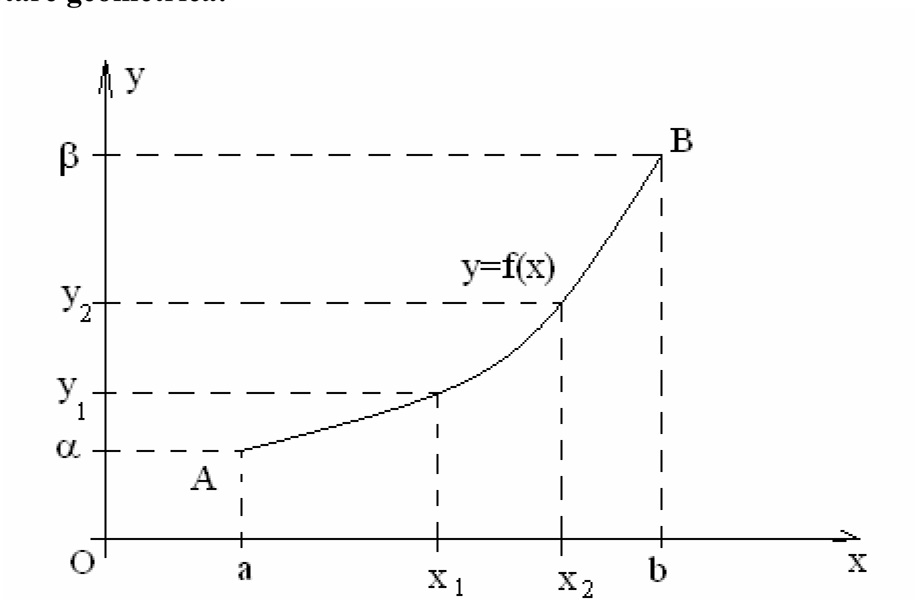


Figura 2.13

Curba *AB* reprezintă graficul lui $y = f(x)$ care este continuă şi strict crescătoare pe $[a,b]$. Fiecare $y \in [\alpha, \beta]$ corespunde la un singur $x \in [a,b]$ astfel încât $f(x) = y$. Curba *AB* stabileşte o corespondență unu-la-unu între *x* şi *y* şi atunci putem considera şi *x* ca o funcție de *y* pe $[\alpha, \beta]$, adică putem spune că $x = \varphi(y)$ este inversa funcției $y = f(x)$. Funcția $x = \varphi(y)$ este reprezentată de curba *AB* şi este continuă şi strict crescătoare pe $[\alpha, \beta]$ deoarece dacă $y_1 < y_2 \Rightarrow x_1 < x_2$.

Observație: Considerații similare pot fi aplicate şi în cazul unei funcții continue şi strict descrescătoare pe un interval $[a,b]$.

Teorema 2: Fie $y = f(x)$ o funcție care are derivată nenulă în x_0, adică $f'(x_0) \neq 0$ şi fie $x = \varphi(y)$ funcția inversă, funcție care este continuă în $y_0 = f(x_0)$. Atunci funcția inversă $x = \varphi(y)$ are derivată în y_0 şi are loc:

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \qquad f'(x_0) \neq 0$$

Regula de derivare din teorema 2 se poate scrie şi în forma: $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$

Interpretare geometrică:

Dacă $y = f(x)$ are derivată nenulă în x_0, atunci există tangentă la graficul $y = f(x)$ în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ şi această tangentă nu este paralelă cu axa x. Atunci, există şi tangenta la curba $x = \varphi(y)$ în acelaşi punct $M_0(x_0, f(x_0))$.

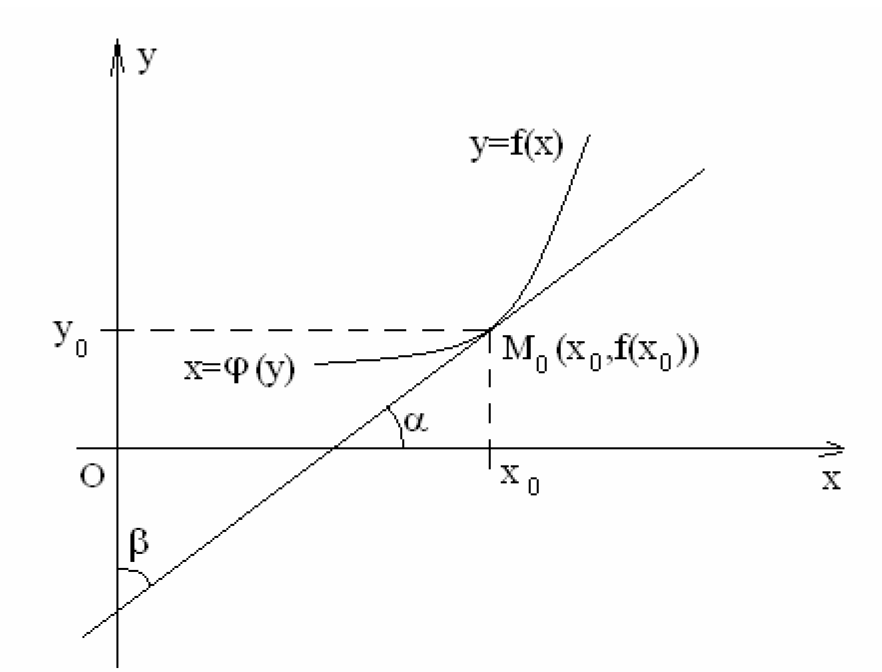


Figura 2.14

Funcțiile $y = f(x)$ şi $x = \varphi(y)$ sunt inverse una alteia şi sunt reprezentate grafic de aceeaşi curbă.

$$f'(x_0) = tg\alpha$$

$$\varphi'(y_0) = tg\beta$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$tg\beta = tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

$$\Rightarrow \qquad \varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Exerciții:

Determinați derivata x'_y, dacă

$$y = x + \ln x \qquad y = 3x + x^3 \qquad y = x - \sin x$$

Diferențierea funcțiilor trigonometrice inverse

a) $y = \arcsin x$, $x \in [-1, +1]$

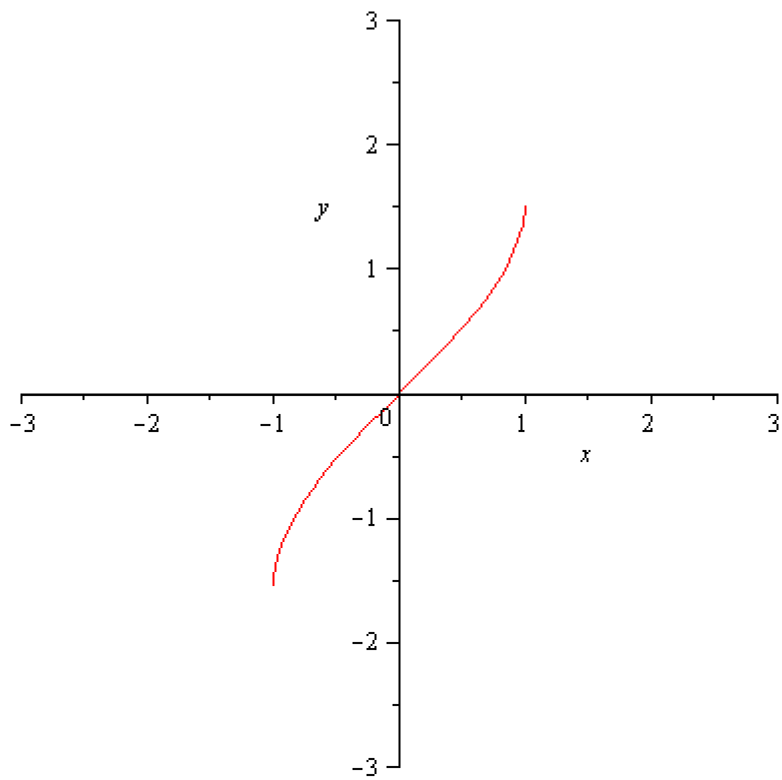


Figura 2.15 $f(x) = \arcsin x$

$y = \arcsin x$ este inversa funcției $x = \sin y$ definită pentru $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$. Funcția $x = \sin y$ are derivată pozitivă $x'_y = \cos y$ pentru $\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \quad \exists \quad y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,+1)$$

$$\Rightarrow \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1,+1)$$

Observație: Punctele $x = \pm 1$ nu sunt luate în considerare deoarece derivata $x'_y = \cos y$ este nulă în $y = \pm \pi / 2$.

b) $y = arctgx$, $x \in \mathbb{R}$

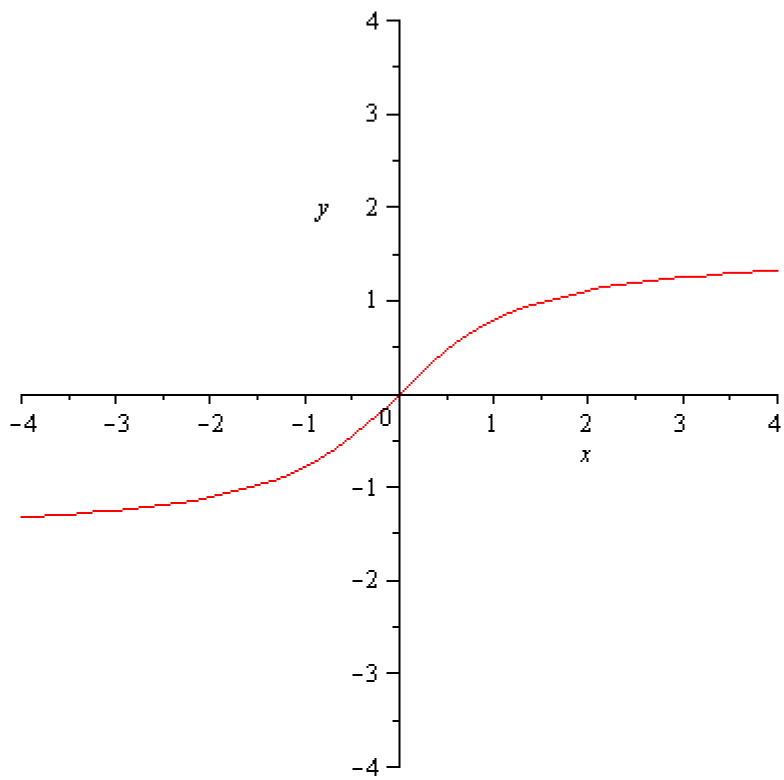


Figura 2.16 $f(x) = arctg\ x$

$y = arctgx$ este inversa funcției $x = tgy$ pentru $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \quad y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

c) Pentru a determina formulele de derivare pentru funcțiile $y = \arccos x$ şi $y = arcctgx$ este suficient să utilizăm relațiile:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, +1)$$

$$\Rightarrow \quad (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Diferențierea funcțiilor hiperbolice

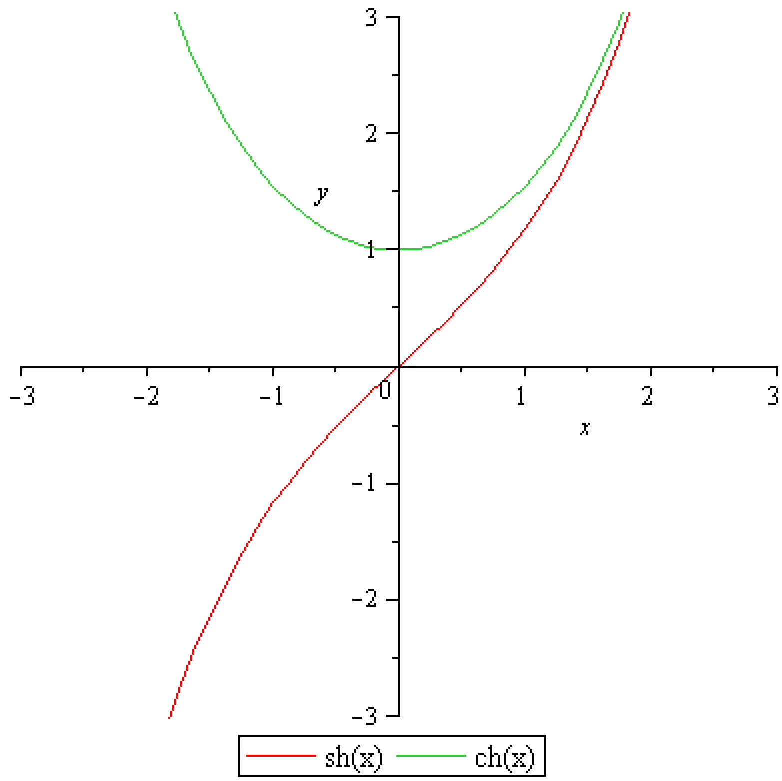
Definiții: $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$(shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$$

$$(chx)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx$$

Definiții:

$$thx = \frac{shx}{chx} \qquad cthx = \frac{chx}{shx}$$



Utilizând regula de derivare a raportului şi identitatea $ch^2x - sh^2x = 1$, obținem

$$(thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{ch^2x - sh^2x}{ch^2x} = \frac{1}{ch^2x}$$

$$(cthx)' = \left(\frac{chx}{shx}\right)' = \frac{sh^2x - ch^2x}{sh^2x} = -\frac{1}{sh^2x}, \quad x \neq 0$$

2.10 Diferențierea funcțiilor elementare de bază

1) $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in R, \quad x > 0$

2) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0$

3) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

4) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1$

5) $\left(e^x\right)' = e^x$

6) $\left(\sin x\right)' = \cos x$

7) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

8) $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z$

9) $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in Z$

10) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,+1)$

11) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,+1)$

12) $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

13) $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

14) $\left(shx\right)' = chx$

15) $\left(chx\right)' = shx$

16) $\left(thx\right)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$

17) $\left(cthx\right)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}, \quad x \neq 0$

Diferențierea logaritmică

Aceasta este utilă în cazul funcțiilor compuse de tip putere-exponențială

$$y=\left[u(x)\right]^{v(x)}$$

unde $u(x)>0$ şi $u(x)$, $v(x)$ sunt diferenţiabile.

$$\ln y = v(x)\ln u(x)$$
$$\frac{y'}{y}=v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}$$
$$y'=\left[u(x)\right]^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

Exemplu:

$$y=x^x,\quad x>0$$

$$\ln y = x\ln x$$

$$\frac{y'}{y}=\ln x+1$$

$$y'=x^x(\ln x+1)$$

2.11 Derivate şi diferenţiale de ordin superior

Derivate de ordin superior

Dacă $f(x)$ o funcţie derivabilă pe (a,b), atunci derivata funcţiei $f'(x)$ este şi ea o funcţie pe (a,b). Este posibil ca $f'(x)$ să fie şi ea o funcţie derivabilă pe (a,b). Derivata lui $f'(x)$ se numeşte *derivată secundă* a lui $f(x)$ sau derivată de ordinul doi a lui $f(x)$.

Notaţie: $f''(x)$**,** $f^{(2)}(x)$

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'$$

Similar, derivata de ordinul n a lui $f(x)$ este derivata derivatei de ordinul $n-1$a lui $f(x)$, adică

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{n-1}(x)\right)'$$

Exemple:

1) Calculați derivata de ordinul *n* pentru

$$y=e^{kx}, \qquad k=const$$

$$y'=ke^{kx}, \qquad y''=k^2e^{kx}, \quad y'''=k^3e^{kx} \qquad \ldots$$

Prin inducție se arată că

$$\left(e^{kx}\right)^{(n)}=k^ne^{kx}, \qquad k=1,2,\ldots$$

2) Calculați derivata de ordinul *n* pentru

$$y=\sin x$$

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$y''=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\ldots$$

Prin inducție se arată că:

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right), \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

3) Calculați derivata de ordinul *n* pentru

$$y=\cos x$$

$$y'=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$y''=-\cos x=\cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\ldots$$

Prin inducție se arată că:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Mulțimea funcțiilor $f(x)$ care sunt definite pe (a,b) şi au derivate până la ordinul n continue pe (a,b) se notează cu $C^n(a,b)$. Spunem că o funcție $f(x)$ este *infinit sau indefinit diferențiabilă* pe (a,b) şi scriem $f(x) \in C^{\infty}(a,b)$ dacă $f(x)$ are derivate de orice ordin în $\forall x \in (a,b)$. De exemplu, e^x, $\sin x$, şi $\cos x$ sunt infinit diferențiabile pe *R*.

Exemplu: Calculați toate derivatele funcției $y = x^4$

$$y^{(1)} = 4x^3, \quad y^{(2)} = 12x^2, \quad y^{(3)} = 24x, \quad y^{(4)} = 24$$

Deoarece $y^{(4)}$ este o constantă atunci toate derivatele de ordin mai mare ca patru sunt nule

$$y^{(5)} = y^{(6)} = \ldots = y^{(n)} = \ldots = 0$$

Interpretare fizică:

Considerăm legea mişcării rectilinii a unui punct material $s = s(t)$. Prima derivată $s'(t) = v(t)$ defineşte viteza punctului material la momentul t , iar derivata secundă $s''(t) = v'(t) = a(t)$ defineşte accelerația punctului material la momentul *t*.

Formula Leibniz

Fie $u(x)$ şi $v(x)$ două funcții care au derivate de ordinul *n*. Atunci:

a) dacă $y(x) = u(x) \pm v(x) \;\Rightarrow\; y^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x)$
b) dacă $y(x) = u(x) \cdot v(x) \;\Rightarrow$

$$y' = u'v + uv'$$
$$y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$
$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' \quad \text{etc.}$$

Prin inducție se arată că are loc *formula Leibniz*:

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1!}u^{(n-1)}v^{(1)} + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v^{(2)} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(n)}$$

Exemplu:

Calculați derivata $y^{(1001)}$ pentru funcția $y = x^2 e^x$

$$y^{(1001)} = \left(e^x \cdot x^2\right)^{(1001)} = \left(e^x\right)^{(1001)} x^2 + \frac{1001}{1!}\left(e^x\right)^{(1000)}\left(x^2\right)' + \frac{1001 \cdot 1000}{2!}\left(e^x\right)^{(999)}\left(x^2\right)'' + 0$$

$$y^{(1001)} = e^x x^2 + 2002 e^x x + 1001 \cdot 1000 \cdot e^x$$

Diferențiale de ordin superior

Fie $y = f(x)$ o funcție diferențiabilă în punctul *x*. Diferențiala $dy = f'(x)dx$ poate fi și ea o funcție diferențiabilă de *x*. Atunci, există diferențiala unei diferențiale a unei funcții date care se numește *diferențială de ordinul* doi sau diferențială secundă a lui $y = f(x)$.

Notație: d^2y

$$d^2 y = d(dy)$$

Similar, diferențiala de ordinul *n* unei funcții $y = f(x)$ este diferențiala diferențialei de ordinul $n-1$ a funcției $y = f(x)$, adică

$$d^n y = d\left(d^{n-1} y\right)$$

In continuare, deducem câteva formule importante pentru diferențialele de ordin superior.

1) Fie $y = f(x)$ o funcție de variabilă independentă *x* și care are diferențiale de orice ordin. Atunci

$$dy = f'(x)dx$$

unde $dx = \Delta x$ este independent de *x*. Prin definiție,

$$d^2 y = d(dy) = d\left(f'(x)dx\right)$$

Diferențiala $f'(x)dx$ este o funcție de *x* în care factorul *dx* este independent de *x* și poate ieși în afara semnului de diferențiere.

$$d^2 y = d(f'(x))dx = (f'(x))' dxdx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2$$

Prin inducție se arată că formula de diferențiere de ordinul n este

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n \quad \text{unde} \quad dx^n = (dx)^n .$$

In notația Leibniz derivata de ordinul n poate fi scrisă ca un raport de diferențiale:

$$f^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

2) Fie $y = f(u)$ cu $u = \varphi(x)$ o funcție diferențiabilă de un număr suficient de ori. Deoarece diferențiala are forma invariantă

$$dy = f'(u)du$$

unde $du = \varphi'(x)dx$ este în general dependentă de *x*.

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(u)du) = d(f'(u))du + f'(u)d(du) = f''(u)du^2 + f'(u)d^2 u$$

$$d^2 y = f''(u)du^2 + f'(u)d^2 u$$

Observație: Dacă u este variabilă independentă, atunci $d^2 u = 0$ şi

$$d^2 y = f''(u)du^2$$

$$d^3 y = d\left(d^2 y\right) = d\left(f''(u)du^2 + f'(u)d^2 u\right)$$

$$= d\left(f''(u)\right)du^2 + f''(u)d\left(du^2\right) + d\left(f'(u)\right)d^2 u + f'(u)d(d^2 u)$$

$$= f'''(u)du\ du^2 + f''(u)2du\ d(du) + f''(u)du\ d^2 u + f'(u)d^3 u$$

$$d^3 y = f''(u)du^2 + 3f''(u)du\ d^2 u + f'(u)d^2 u$$

Exerciții:

1. Determinați creșterea Δy şi diferențiala dy pentru funcția $y = 5x + x^2$ pentru $x = 2$ şi $\Delta x = 0.001$.

$$\Delta y = 5(x+\Delta x) + (x+\Delta x)^2 - 5x - x^2$$

$$= (5+2x)\Delta x + \Delta x \cdot \Delta x$$

$$\Delta y = (5+2\cdot 2)\cdot 0.001 + (0.001)^2 = 0.009001$$

$$dy = (5+2x)\Delta x = 0.009$$

2. Calculați $d^2 y$ pentru $y = \cos 5x$.

$$d^2 y = -25\cos 5x \; dx^2$$

2.12 Diferențierea funcțiilor date în formă parametrică

În plan, considerăm un sistem cartezian de coordonate xOy şi două funcții continue $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ definite pe intervalul $[\alpha, \beta]$. Acestea definesc o curbă parametrizată continuă Γ. Ecuațiile parametrice ale curbei sunt:

$$\Gamma : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

Curba Γ este formată din mulțimea punctelor M cu coordonatele $(\varphi(t), \psi(t))$ obținute atunci când t parcurge intervalul $[\alpha, \beta]$.

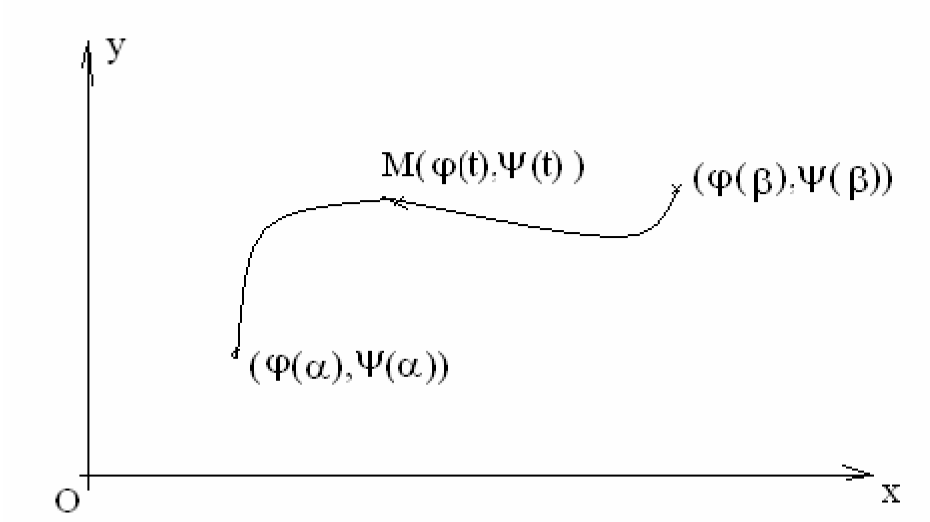


Figura 2.17

Exemple:

1. Cercul de rază *R*, şi centru originea sistemului de coordonate:
2.

$$\Gamma : \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Parametrul *t* este unghiul dintre axa *Ox* şi vectorul de poziție $\overrightarrow{OM}$ măsurat în radiani.

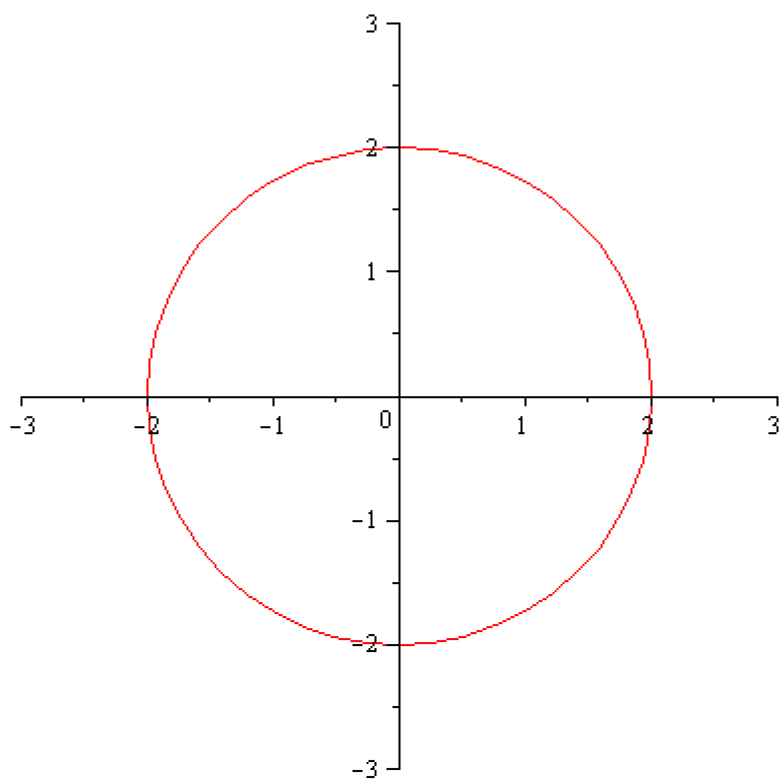


Figura 2.18 Cercul cu raza $R = 2$

3. Elipsa cu semiaxele *a* şi *b*:

$$\Gamma : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\cos t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

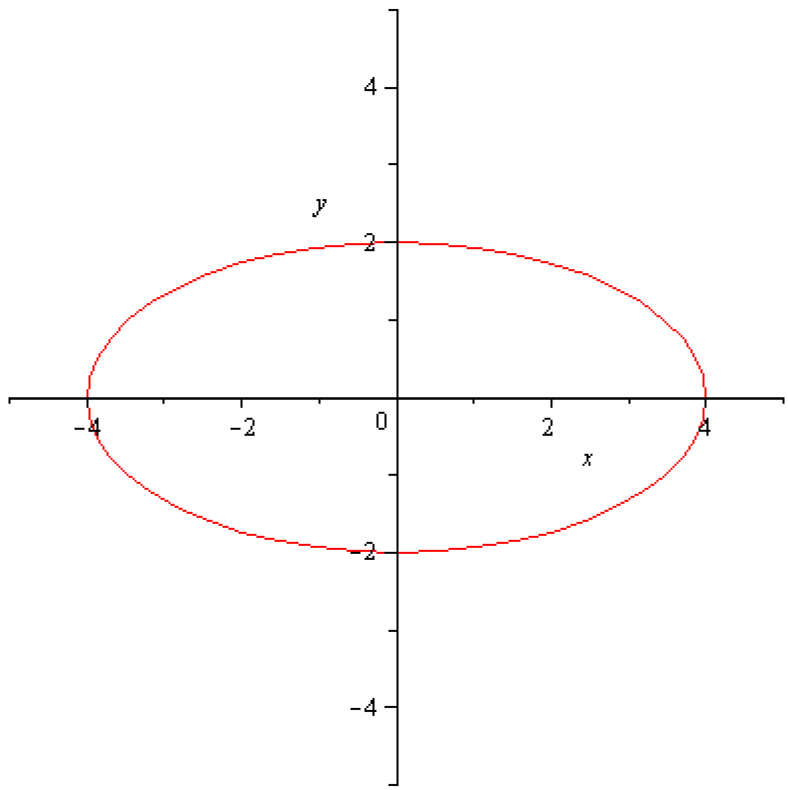


Figura 2.19 Elipsa cu semiaxele $a = 4$, $b = 2$

Ecuațiile parametrice ale unei curbe plane pot fi reduse la ecuația $F(x, y) = 0$, eliminând parametrul *t*. De exemplu,

-în cazul cercului

$$\Gamma : \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

eliminând parametrul *t* se obține $x^2 + y^2 = R^2$

-în cazul elipsei:

$$\Gamma:\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\cos t \end{cases}, \qquad t\in[0,2\pi]$$

prin eliminarea lui t se obține $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Uneori este dificilă eliminarea parametrului t, situație în care avem nevoie de tehnici de determinare a derivatei lui y în raport cu x.

Astfel, fie o curbă definită parametric de funcțiile $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ definite şi continue pe (α,β).

$$\Gamma:\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t\in[\alpha,\beta]$$

Presupunem că funcția $x=\varphi(t)$ admite inversă $t=g(x)$. Atunci, $y=\psi[g(x)]$ este o funcție compusă de x. Mai mult, presupunem că $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ sunt diferențiabile în $t\in(\alpha,\beta)$, $\varphi'(t)\neq 0$ şi $t=g(x)$ este diferențiabilă în punctul x corespunzător lui t. Cu teorema 1 de derivare a funcțiilor compuse, funcția $y=\psi[g(x)]$ este diferențiabilă în x şi

$$y'_x = y'_t\cdot t'_x$$

Cu teorema 2 de derivare a funcției inverse

$$t'_x=\frac{1}{x'_t}$$

$$y'_x = y'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{y'_t}{x'_t}$$

$$\Rightarrow \qquad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \varphi'(t)\neq 0$$

Acelaşi rezultat se poate obţine dacă împărţim numărătorul şi numitorul din $\frac{dy}{dx}$ cu dt :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Exemplu:

Considerăm un cerc reprezentat parametric:

$$\Gamma:\begin{cases}x=R\cos t\\ y=R\sin t\end{cases},\qquad t\in[0,2\pi]$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{R\cos t}{-R\sin t}=-ctgt$$

sau: $$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

Dacă $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ au derivate de ordinul *k*, şi $\varphi'(t)\neq 0$, atunci funcția compusă $y=\psi\left[g(x)\right]$ are derivate de ordinul *k* în raport cu *x*.

Astfel, derivata secundă este:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi')^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi')^3(t)}$$

$$y''_x=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$$

Şi în general,

$$y_x^{(n)} = \frac{\left(y_x^{(n-1)}\right)'_t}{x'_t}$$

În aceste formule de derivare, funcția $y = f\left(x\right)$ este dată în mod parametric de ecuațiile $x = x(t)$ și $y = y\left(t\right)$.

Exemplu:

Calculați $\frac{d^2y}{dx^2}$ pentru funcția definită parametric:

$$\Gamma : \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \qquad t \in \left[0, 2\pi\right] \text{ numită cicloidă}$$

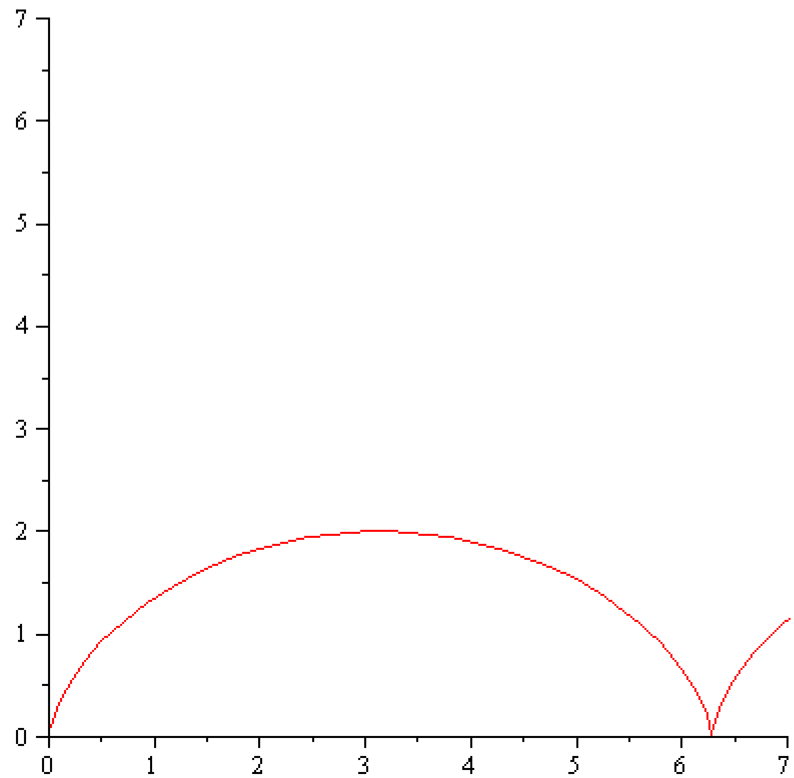


Figura 2.20 Cicloida cu $a = 1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=ctg\,\frac{t}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(ctg\,\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(ctg\,\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{1}{dx/dt}=$$

$$=-\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\frac{1}{2}\frac{1}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{4a\sin^2\frac{t}{2}\sin^2\frac{t}{2}}=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$$

Teorema 1 (Rolle):

Dacă o funcție $f(x)$

1. este continuă pe intervalul închis $[a,b]$
2. este derivabilă pe intervalul deschis (a,b)
3. ia valori egale la capetele intervalului, adică $f(a)=f(b)$

atunci există cel puțin un punct $\xi \in (a,b)$ astfel încât $f'(\xi)=0$

Interpretare geometrică: între *a* şi *b* există cel puțin un punct ξ în care tangenta la curba $y=f(x)$ este paralelă cu axa *x*.

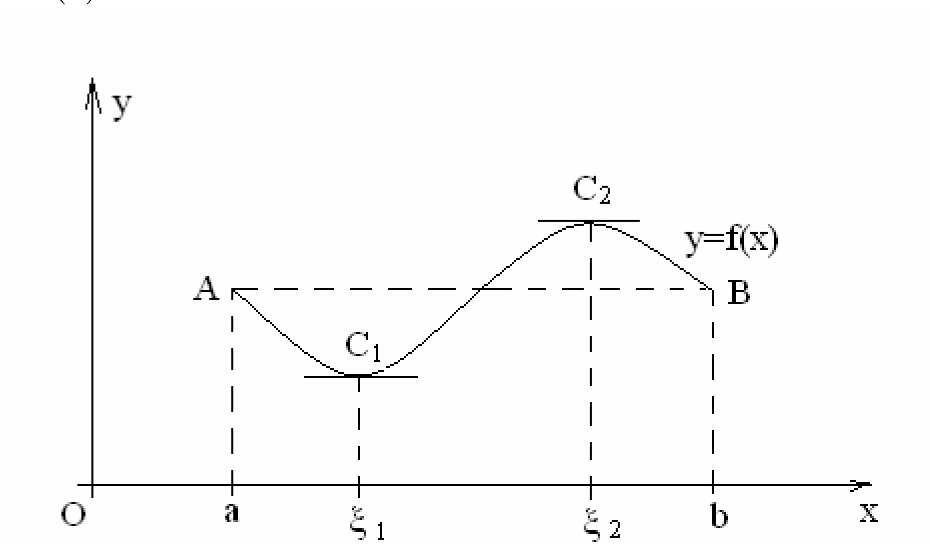


Figura 2.21

Exemple: (subliniază importanța ipotezelor teoremei)

1) $f(x)=|x|, \quad x \in [-1,+1]$

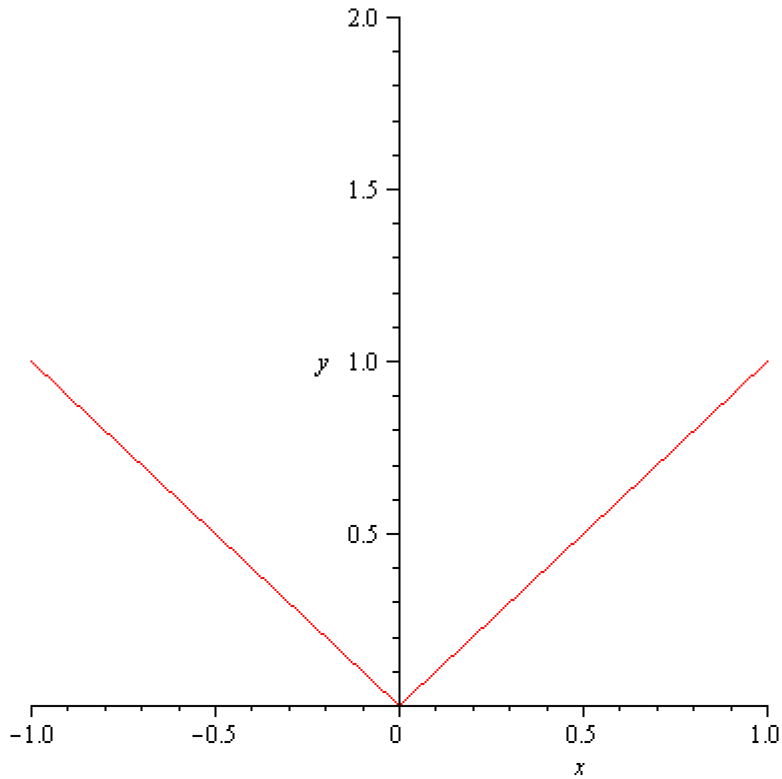


Figura 2.22 $f(x)=|x|$

Pentru această funcție, nu este îndeplinită ipoteza 2 a teoremei, deoarece funcția nu este derivabilă în $x=0$. Teorema lui Rolle nu este aplicabilă, deci în intervalul $(-1,+1)$ nu există nici un punct în care $f'(x)=0$.

2) $f(x)=x-[x],\ \ x\in[0,1]$

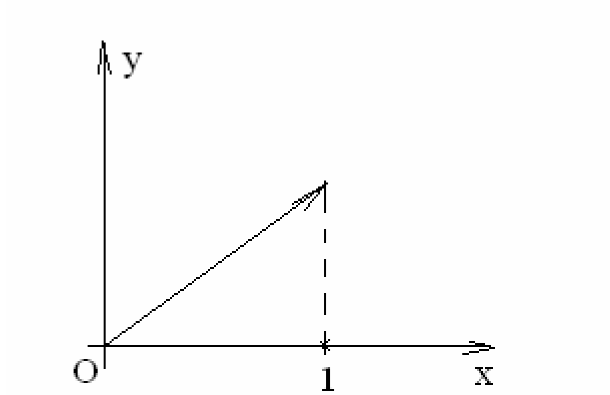


Figura 2.23 $f(x)=x-[x]$

Pentru această funcție, nu este îndeplinită ipoteza 1 a teoremei, deoarece funcția nu este continuă în $x=1$. Teorema lui Rolle nu este aplicabilă, deci în intervalul $(0,1)$ nu există nici un punct în care $f'(x)=0$.

Teorema 2 (Lagrange sau a creşterilor finite):

Dacă o funcție $f(x)$

1. este continuă pe intervalul închis $[a,b]$
2. este derivabilă pe intervalul deschis (a,b)

atunci există cel puțin un punct $\xi \in (a,b)$ astfel încât

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi), \quad \xi \in (a,b)$$

Observație: Teorema Rolle este un caz particular al teoremei Lagrange şi se obține impunând $f(a)=f(b)$.

Interpretare geometrică: între a şi b există cel puțin un punct ξ în care tangenta la curba $y=f(x)$ este paralelă cu coarda *AB*, unde $A(a,f(a))$ şi $B(b,f(b))$.

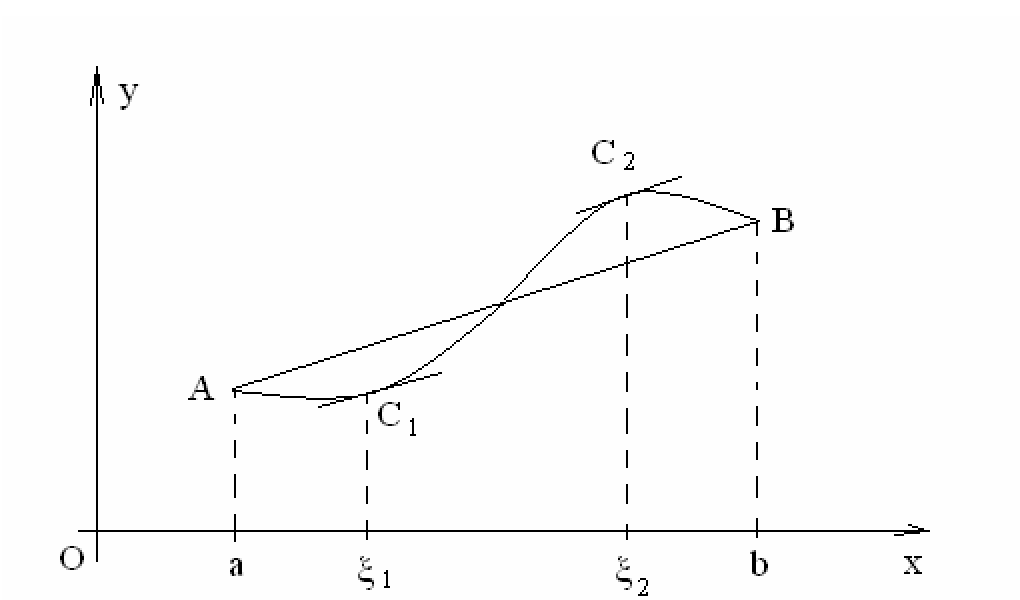


Figura 2.24

În formula

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi), \quad \xi\in(a,b)$$

sau

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a), \quad \xi\in(a,b)$$

numărul necunoscut ξ poate fi reprezentat în forma

$$\xi=a+\theta(b-a), \ \ \theta\in(0,1)$$

$$f(b)-f(a)=f'\big(a+\theta(b-a)\big)(b-a), \quad \theta\in(0,1)$$

Înlocuind *a* şi *b* cu *x* şi $x+\Delta x$ respectiv, obținem

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x, \quad \theta\in(0,1)$$

Această expresie reprezintă o relație *exactă* între creşterea argumentului şi creşterea funcției, în timp ce

$$\Delta f(x)\approx f'(x)\Delta x$$

este o relație *aproximativă*, a cărei eroare relativă tinde la zero pentru $\Delta x\to 0$. În relație exactă însă numărul θ este în general necunoscut.

Exemplu:

Cu ajutorul teoremei Lagrange arătați că:

$$\left|arctg\ x_2-arctg\ x_1\right|\le\left|x_2-x_1\right|, \ \ \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$$

Considerăm funcția $f(x)=arctg\ x$. Aceasta verifică ipotezele din teorema Lagrange pe orice interval $[x_1,x_2]\in\mathbb{R}$.

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1), \quad \xi\in(x_1,x_2)$$

$$arctg\ x_2-arctg\ x_1=\frac{1}{1+\xi^2}(x_2-x_1), \quad \xi\in(x_1,x_2)$$

$$\left|arctg\ x_2 - arctg\ x_1\right| = \frac{1}{1+\xi^2}\left|x_2 - x_1\right|$$

Deoarece $\frac{1}{1+\xi^2} \leq 1,\ \ \forall \xi \in \mathbb{R}$

$$\left|arctg\ x_2 - arctg\ x_1\right| \leq \left|x_2 - x_1\right|$$

Teorema 3: (Cauchy)

Dacă funcțiile $f(x)$ şi $\varphi(x)$

1. sunt continue pe intervalul închis $[a,b]$
2. sunt derivabile pe intervalul deschis (a,b)
3. $\varphi'(x) \neq 0$ pe (a,b)

atunci există cel puțin un punct $\xi \in (a,b)$ astfel încât

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

Observație: Teorema Lagrange este un caz particular al teoremei Cauchy pentru $\varphi(x) = x$.

Remarcă: Teoremele Rolle, Lagrange şi Cauchy afirmă existența unor puncte de mijloc $\xi \in (a,b)$ în care formulele menționate sunt valabile. Din acest motiv, acestea se numesc teoreme de medie.

2.14 Regula L'Hospital

Teorema 1: (Regula L'Hospital pentru nedeterminarea $\frac{0}{0}$)

Fie funcțiile $f(x)$ şi $\varphi(x)$ definite pe o vecinătate $(a-\delta, a+\delta)$ a punctului a cu o posibilă excepție în a. Dacă au loc:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$

2) $f(x)$ şi $\varphi(x)$ sunt derivabile pe $(a-\delta, a+\delta)$ cu o posibilă excepție în a

3) $\varphi'(x) \neq 0$ pe $(a-\delta, a+\delta)$

4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$

atunci

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$$

Această relație reprezintă regula L'Hospital care permite, în condițiile menționate, înlocuirea limitei unui raport de funcții cu limita raportului derivatelor acestora, limită care uneori este mai uşor de calculat.

Exemplu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Observații:

1) Dacă condițiile din teoremă sunt satisfăcute pe $(a-\delta, a)$ sau $(a, a+\delta)$, atunci regula L'Hospital este aplicabilă la calculul limitelor laterale.

2) Este posibil ca limita raportului derivatelor să nu existe în timp ce limita raportului funcțiilor respective să existe. De exemplu,

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \qquad \varphi(x) = x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to 0} \left(2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) \text{ nu există}$$

3) Uneori regula L'Hospital poate fi aplicată în mod repetat la calcularea limitei $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$. De exemplu, dacă $f(x)$ şi $\varphi(x)$ şi derivatele lor $f'(x)$ şi $\varphi'(x)$ toate satisfac ipotezele teoremei 1, putem aplica regula L'Hospital şi la calcularea limitei $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Exemplu:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

Teorema 2: (Regula L'Hospital pentru nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$)

Fie funcţiile $f(x)$ şi $\varphi(x)$ definite pe o vecinătate $(a - \delta, a + \delta)$ a punctului *a* cu o posibilă excepţie în *a*. Dacă au loc:

1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ şi $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$
2) $f(x)$ şi $\varphi(x)$ sunt derivabile pe $(a - \delta, a + \delta)$ cu o posibilă excepţie în *a*
3) $\varphi'(x) \neq 0$ pe $(a - \delta, a + \delta)$
4) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$

atunci

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$$

Regula L'Hospital se foloseşte şi la calcularea următoarelor nedeterminări:

a) Evaluarea nederminării $0 \cdot \infty$ Fie $F = f \cdot \varphi$ cu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$. Dacă calculăm limita $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) \varphi(x) \right]$ avem o nedeterminare de tipul $0 \cdot \infty$ Scriind produsul $F = f \cdot \varphi$ în forma

$$F=\frac{f}{\frac{1}{\varphi}}$$

obținem nedeterminarea $\frac{0}{0}$, iar în forma

$$F=\frac{\varphi}{\frac{1}{f}}$$

obținem cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$ abordat anterior.

Exemplu:

$$\lim_{x\to 0, x>0}\left(x\ln x\right)=\lim_{x\to 0, x>0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0, x>0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$$

b) Evaluarea nederminării $\infty-\infty$ Fie $\Phi=f-\varphi$ cu $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=\infty$, $\lim_{x\to a}\varphi\left(x\right)=\infty$. Dacă calculăm limita $\lim_{x\to a}\left[f\left(x\right)-\varphi\left(x\right)\right]$ avem o nedeterminare de tipul $\infty-\infty$. Scriind funcția Φ în forma

$$\Phi=f-\varphi=\frac{1}{\frac{1}{f}}-\frac{1}{\frac{1}{\varphi}}=\frac{\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{\varphi}}$$

obținem cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$ abordat anterior.

Exemplu:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\frac{x-1}{x}}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}\ln x}=$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + (x-1)\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

c) $\lim_{x\to a} \left[f(x) \right]^{\varphi(x)}$ în situațiile

i) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$ $\qquad 0^0$

ii) $\lim_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty$ $\qquad 1^\infty$

iii) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$ $\qquad \infty^0$

Pentru a rezolva aceste nedeterminări se recomandă calcularea limitei logaritmului natural din funcția inițială, adică

$$y = f^{\varphi} \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to a} \ln y = \lim_{x\to a} \varphi \ln f$$

Această nouă nedeterminare este de tipul discutat la punctul a) adică $0 \cdot \infty$. Dacă

$$\lim_{x\to a} \ln y = A \quad \text{atunci} \quad \lim_{x\to a} y = e^A$$

Exemple:

1. $\lim_{x\to 0, x>0} x^x$, $x > 0$

$$y = x^x \quad \Rightarrow \quad \ln y = x \ln x$$

$$\lim_{x\to 0, x>0} \ln y = \lim_{x\to 0, x>0} x \ln x = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0, x>0} y = e^0 = 1$$

2. $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad \ln y = x \ln(1+x)$$

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1}{x+1} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0, x > 0} y = e^1 = e$$

Teorema 3:

Fie funcțiile $f(x)$ şi $\varphi(x)$ definite pentru x cu $|x|$ mare. Dacă au loc:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = \infty$ sau $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$

2) $f(x)$ şi $\varphi(x)$ sunt derivabile pentru x cu $|x|$ mare

3) $\varphi'(x) \neq 0$

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$

atunci

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$$

Exemple:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$

Se observă că exponențiala creşte mai repede decât funcția putere la infinit.

Observație: Uneori Regula L'Hospital nu poate fi aplicată.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\quad \text{etc.}$$

Dar,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1$$

2.15 Monotonia funcțiilor

Definiții

O funcție $f(x)$ definită pe $[a,b]$ este *crescătoare* pe $[a,b]$ dacă $\forall x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1)\le f(x_2)$.

Dacă $x_1<x_2$ totdeauna implică $f(x_1)<f(x_2)$, atunci $f(x)$ este *strict crescătoare* pe $[a,b]$.

$f(x)$ este *descrescătoare pe* $[a,b]$ dacă $\forall x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1)\ge f(x_2)$.

Dacă $x_1<x_2$ totdeauna implică $f(x_1)>f(x_2)$, atunci $f(x)$ este *strict descrescătoare* pe $[a,b]$.

O funcție $f(x)$ este *monotonă* pe $[a,b]$ dacă $f(x)$ este numai crescătoare sau strict crescătoare, sau numai descrescătoare sau strict descrescătoare pe $[a,b]$.

Teorema 1: Fie $f(x)$ o funcție continuă pe $[a,b]$ care are derivată $f'(x)$ pe (a,b). Funcția este crescătoare pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă $f'(x)\ge 0$, $\forall x\in(a,b)$.

Teorema 2: Fie $f(x)$ o funcție continuă pe $[a,b]$ care are derivată $f'(x)$ pe (a,b). Funcția este descrescătoare pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a,b)$.

Observații:

- Dacă $f'(x)$ nu-şi modifică semnul pe un interval, atunci funcția este monotonă pe acel interval.
- Dacă $f'(x) > 0$ pe (a,b) $\Rightarrow$ $f(x)$ este strict crescătoare pe (a,b).
- Dacă $f(x)$ este strict crescătoare pe $[a,b]$, $\nRightarrow$ $f'(x) > 0$ pe (a,b).

Exemplu:

$f(x) = x^3$ este strict crescătoare pe $[-1,+1]$. Totuşi derivata sa $f'(x) = 3x^2$ este nulă în $x = 0$.

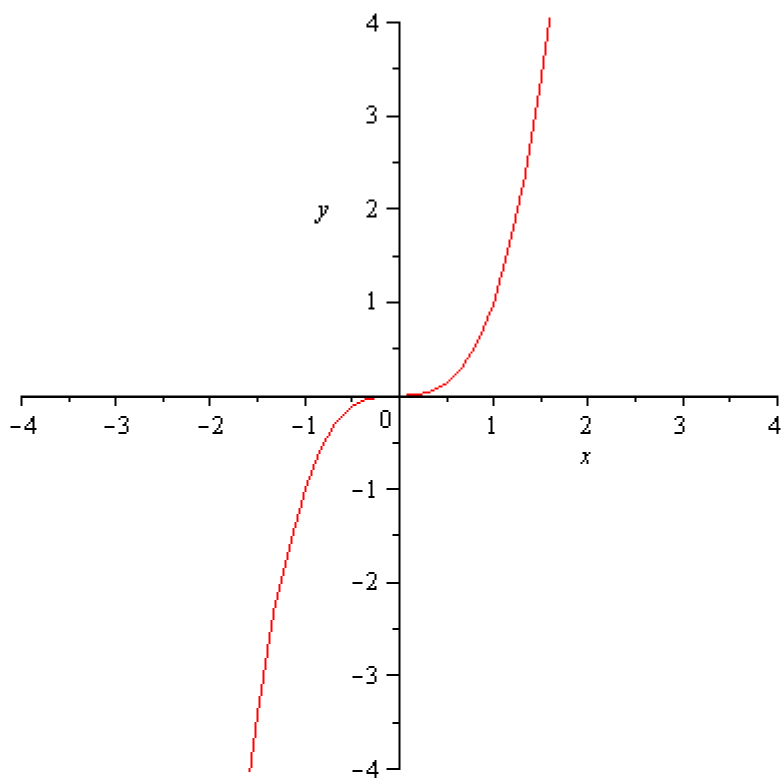


Figura 2.25 $f(x) = x^3$

Funcție strict crescătoare sau strict descrescătoare într-un punct

Definiție: O funcție $f(x)$ este strict crescătoare în $x = x_0$ dacă există o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a lui x_0 astfel încât $f(x) < f(x_0)$, $\forall x < x_0$ și $f(x) > f(x_0)$, $\forall x > x_0$.

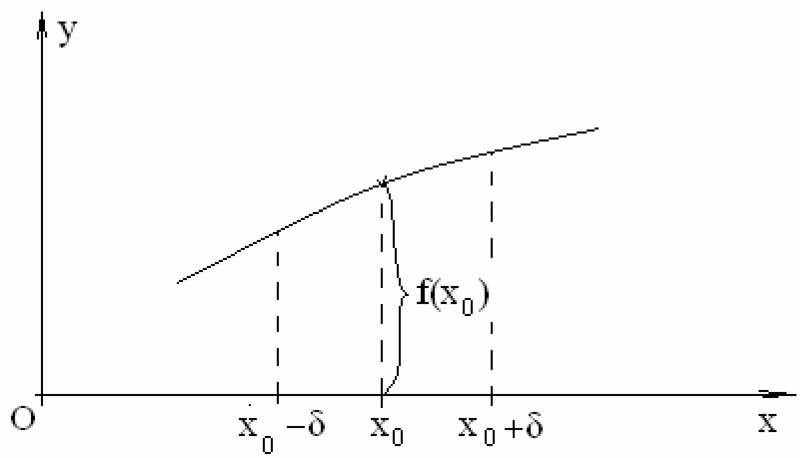


Figura 2.26

Analog, o funcție $f(x)$ este strict descrescătoare în $x = x_0$ dacă există o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a lui x_0 astfel încât $f(x) > f(x_0)$, $\forall x < x_0$ și $f(x) < f(x_0)$, $\forall x > x_0$.

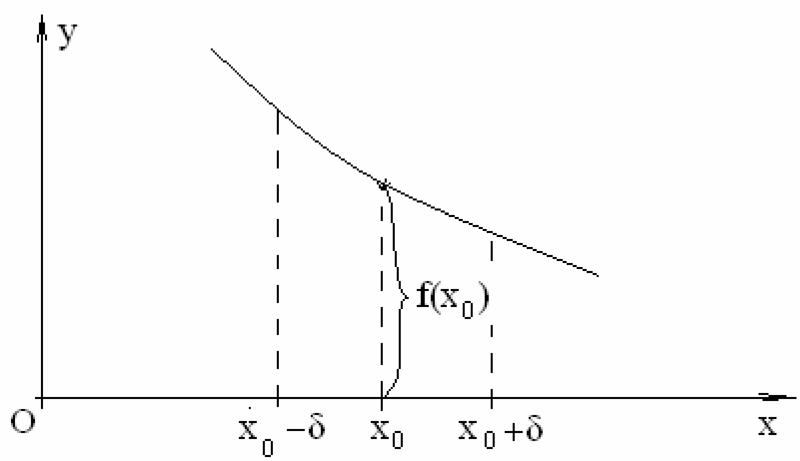


Figura 2.27

Teorema 3: Fie $f(x)$ o funcție care are derivată $f'(x_0)$ în punctul x_0. Dacă $f'(x_0) > 0$, atunci funcția este strict crescătoare în x_0 și dacă $f'(x_0) < 0$ atunci funcția este strict descrescătoare în x_0. (condiții suficiente nu neapărat necesare)

Exemple: **1)**

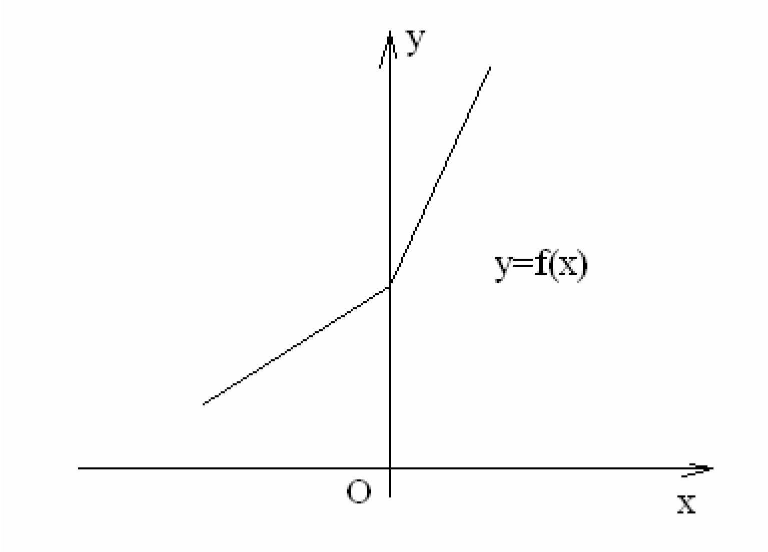


Figura 2.28

Funcția este strict crescătoare în $x_0 = 0$, şi totuşi derivata nu există în acest punct.

2) $y = x^3$

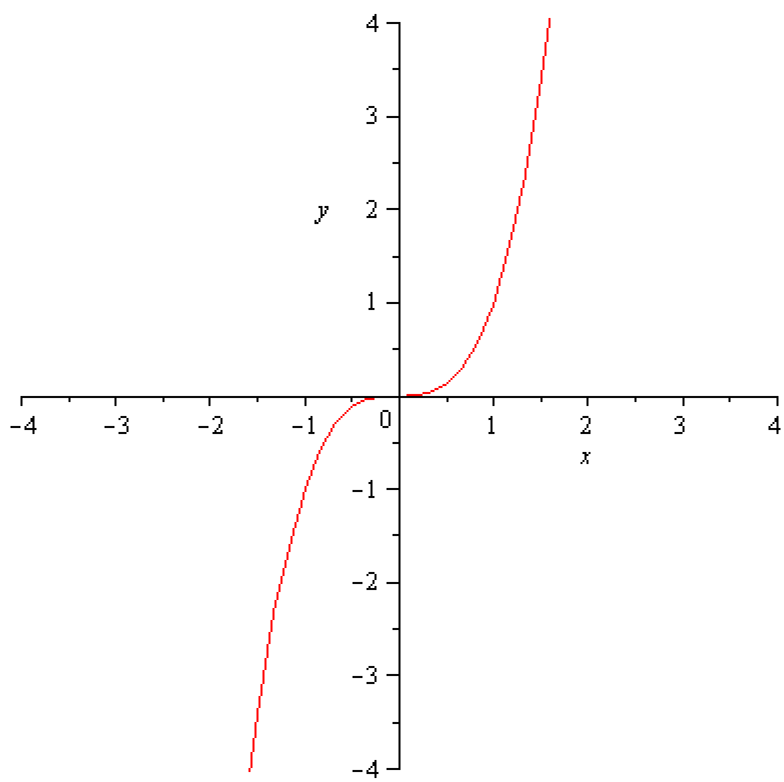


Figura 2.29 $f(x) = x^3$

Funcția este strict crescătoare în $x_0 = 0$, şi totuşi derivata este nulă în acest punct.

2.16 Punctele de extrem ale unei funcții

Definiții Fie $f(x)$ o funcție definită într-o vecinătate a punctului x_0 .
Spunem că funcția are un *maxim local* în x_0 dacă există $\delta > 0$ astfel încât

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \le 0 , \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

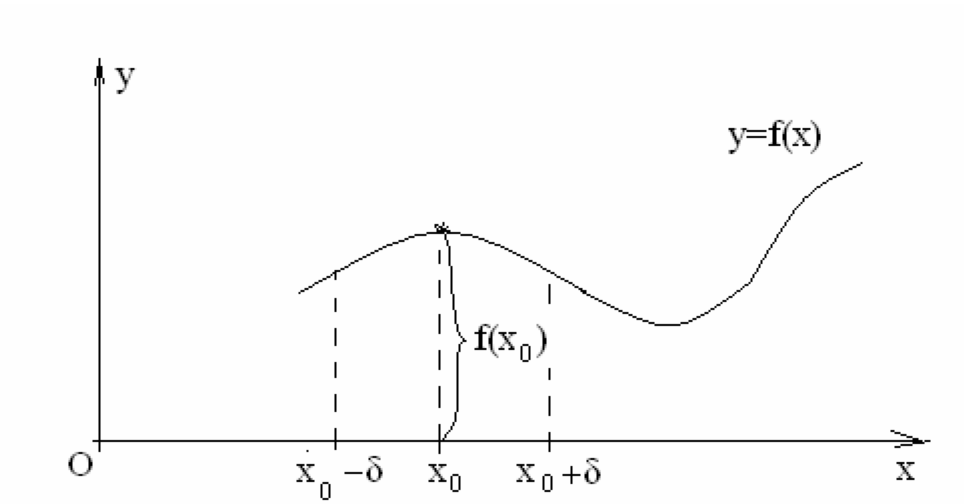


Figura 2.30

Spunem că funcția are un *minim local* în x_0 dacă există $\delta > 0$ astfel încât

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \ge 0 , \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

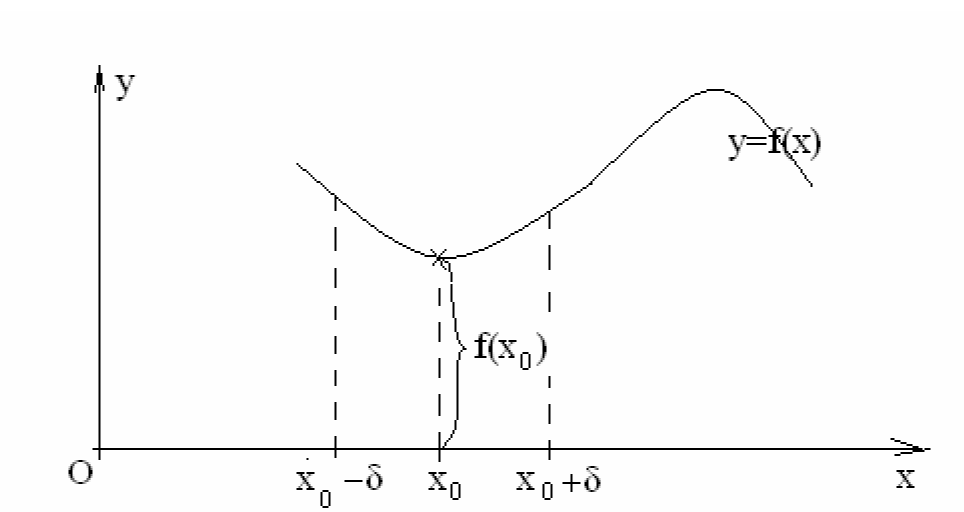


Figura 2.31

Maximul local şi minimul local al unei funcții se numesc *extreme locale* ale funcției.

Observație: In aceste definiții nu s-a presupus continuitatea funcției în x_0.

Exemplu:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

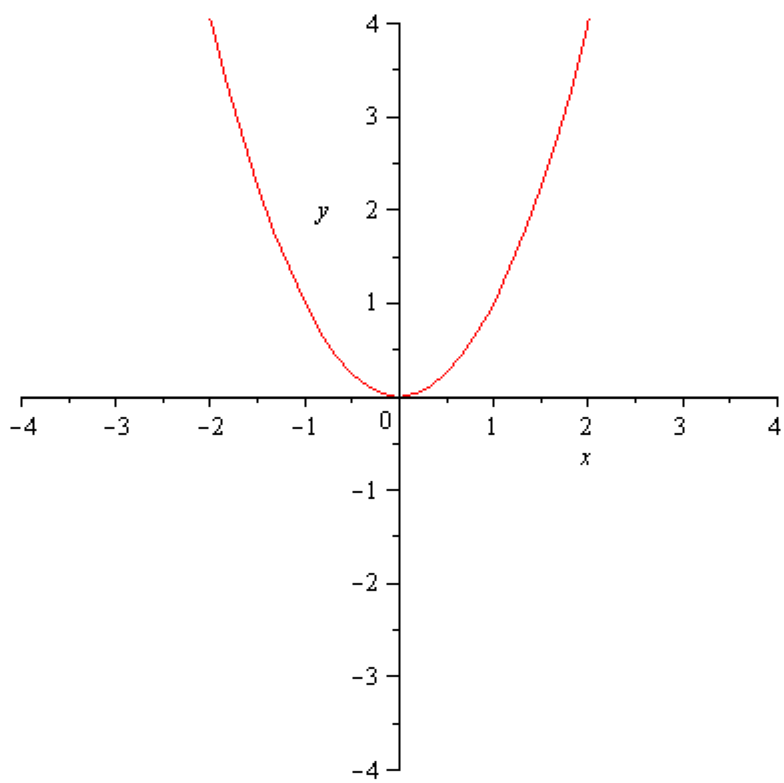


Figura 2.32

Funcția nu este continuă în $x_0 = 0$ dar are un maxim local în $x_0 = 0$. Intr-adevăr, există $\delta > 0$, $\delta = 1$ astfel încât $f(x) - f(0) = f(x) - 1 \leq 0 \;\; \forall \; x \in (-1,+1)$.

Teorema 1: (condiție necesară de extrem) O funcție $f(x)$ poate avea un extrem local numai în puncte în care derivata sa $f'(x)$ este fie nulă fie nu există.

Interpretare geometrică

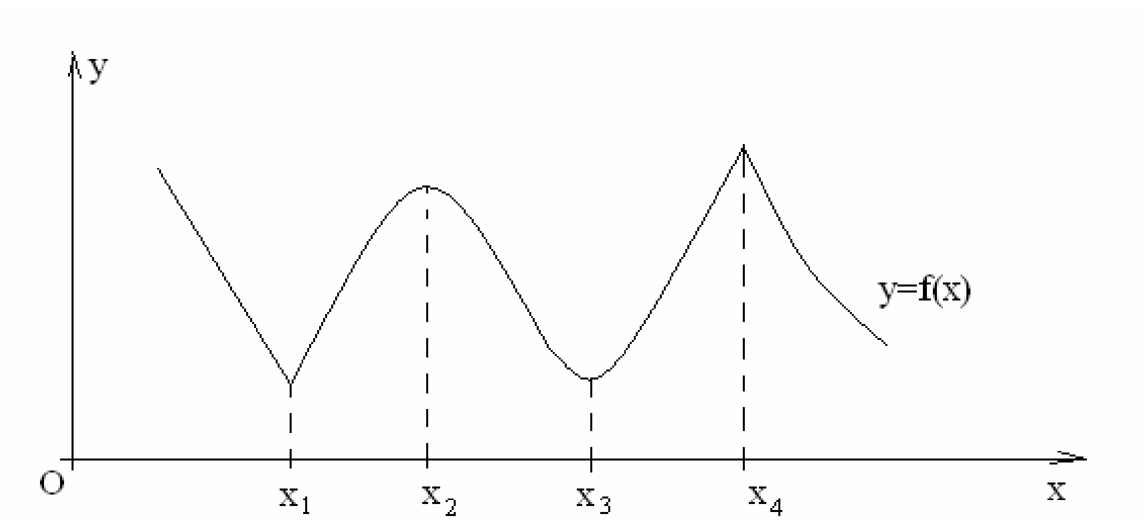


Figura 2.33

Funcția din grafic are extreme locale în punctele x_1, x_2, x_3 şi x_4. Derivata sa $f'(x)$ nu există în x_1 şi x_4 şi este nulă în x_2 şi x_3.

Definiții:

Punctele critice pentru o funcție sunt punctele în care sunt satisfăcute condițiile necesare de extrem. Acestea sunt rădăcinile ecuației $f'(x)=0$ şi punctele în care $f'(x)$ nu există.

Punctele staționare pentru o funcție sunt punctele în care $f'(x)=0$.

Observație: Teorema 1 furnizează doar condiții necesare de extrem. Nu orice punct critic pentru funcție este punct de extrem.

Exemplu: $f(x)=x^3$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x=0 \text{ punct critic}$$

Totuşi funcția nu are extrem în $x_0=0$ deoarece $f(0)=0$ şi $f(x)<0$ $\forall x<0$ şi $f(x)>0$ $\forall x>0$ ceea ce înseamnă că funcția creşte în $x_0=0$.

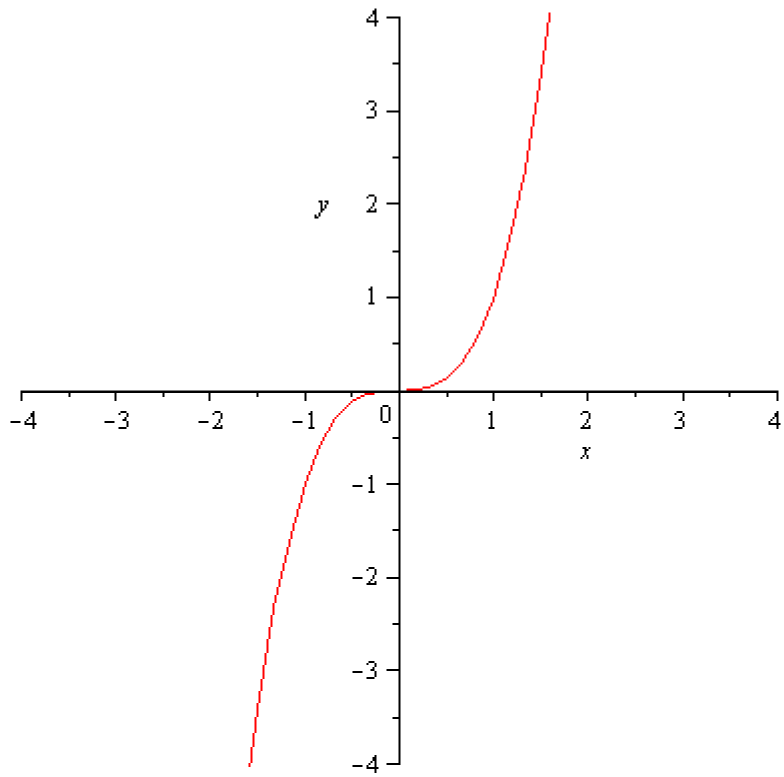


Figura 2.34 $f(x) = x^3$

Dăm în continuare două teoreme care furnizează condiții suficiente pentru maxim sau minim al unei funcții într-un punct.

Teorema 2: Fie funcția $f(x)$ continuă în x_0 şi fie $x = x_0$ un punct critic pentru funcția $f(x)$, adică fie $f'(x_0) = 0$ fie $f'(x_0)$ nu există. Presupunem că $\exists \delta > 0$ astfel încât $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ şi $f'(x) < 0 \ \ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ adică derivata schimbă semnul de la pozitiv la negativ în x_0 atunci când x trece prin x_0 de la stânga la dreapta. In aceste condiții funcția are maxim în x_0.

Teorema 3: Fie funcția $f(x)$ continuă în x_0 şi fie $x = x_0$ un punct critic pentru funcția $f(x)$, adică fie $f'(x_0) = 0$ fie $f'(x_0)$ nu există. Presupunem că $\exists \delta > 0$ astfel încât $f'(x) < 0 \ \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ şi $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ adică derivata schimbă semnul de la negativ la pozitiv în x_0 atunci când x trece prin x_0 de la stânga la dreapta. In aceste condiții funcția are minim în x_0.

Observație: Ipoteza de continuitate a funcției în x_0 este importantă în teoremele 2 şi 3.

Exemplu:

$$f(x)=\begin{cases} -x, & x<0 \\ x+1, & x\geq 0 \end{cases}$$

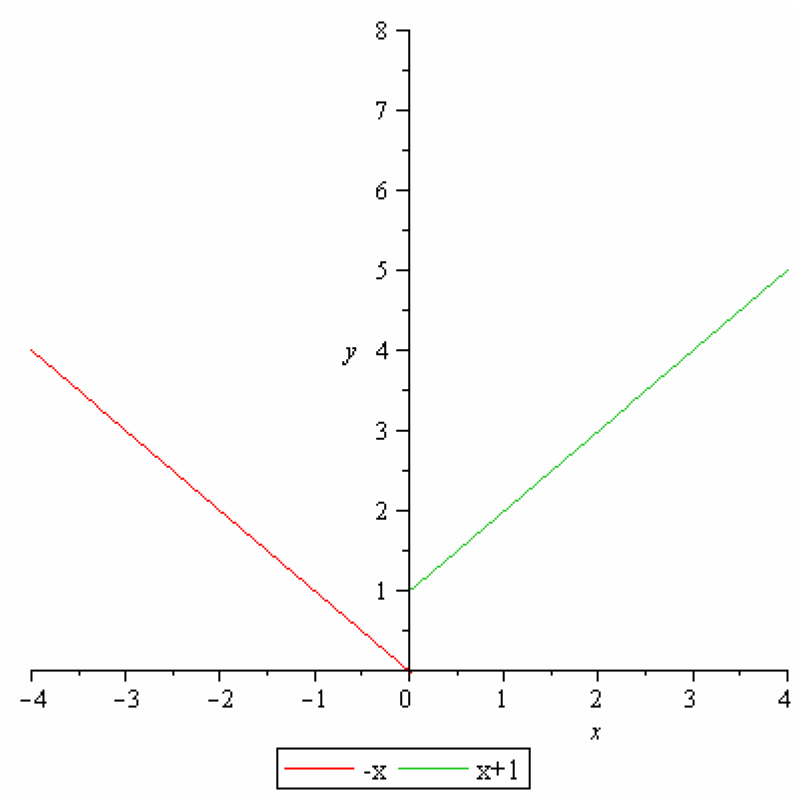


Figura 2.35

$f'(x)$ nu există în x_0. Derivata schimbă semnul când x trece prin $x_0=0$, totuşi funcția nu are extrem în $x_0=0$ deoarece nu există o vecinătate a lui $x_0=0$, în care $f(0)=1$ să fie maximul sau minimul funcției.

Explicația constă în lipsa continuității funcției în $x_0=0$.

Procedeu de determinare a punctelor de extrem

a) Calcularea derivatei $f'(x)$ şi a rădăcinilor ecuației $f'(x)=0$.

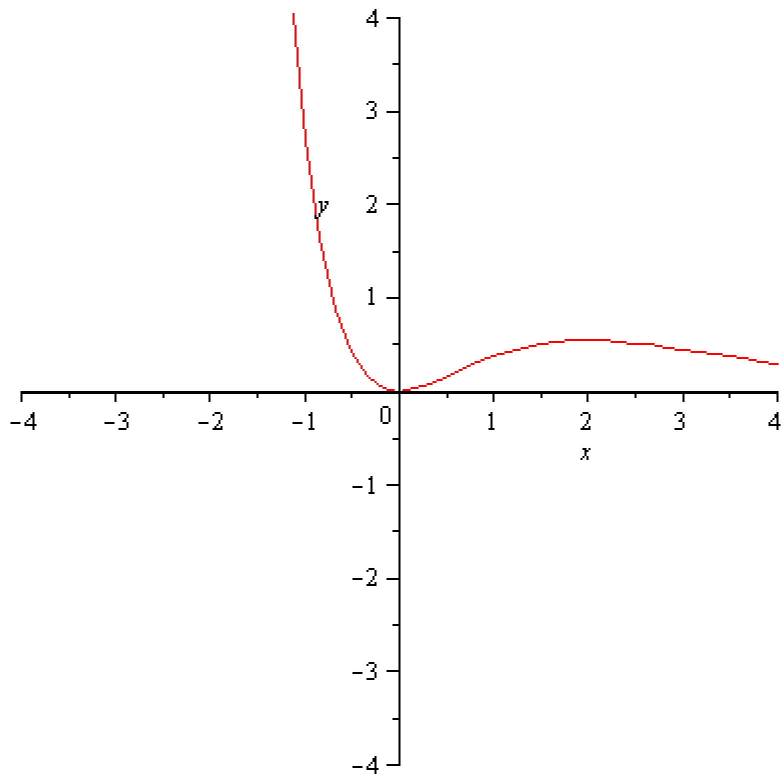
b) Determinarea punctelor în care $f'(x)$ nu există. Aceste puncte împreună cu rădăcinile lui $f'(x)=0$ sunt punctele critice ale funcției.

c) Determinarea semnului lui $f'(x)$ la stânga şi la dreapta fiecărui punct critic.

Atunci, funcţia are maxim în punctul critic x_0 dacă $f'(x)$ îşi schimbă semnul de la pozitiv la negativ când x trece prin punctul critic de la stânga la dreapta. Funcţia are minim în punctul critic x_0 dacă $f'(x)$ îşi schimbă semnul de la negativ la pozitiv când x trece prin punctul critic de la stânga la dreapta. Dacă $f'(x)$ nu-şi modifică semnul când x trece prin punctul critic x_0 , funcţia nu are nici maxim nici minim în x_0.

Exemple:

1) $y = x^2 e^{-x}$



Fihura 2.36 $f(x) = x^2 e^{-x}$

a) $y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(2 - x)x$

b) $y' = 0 \Rightarrow$ punctele critice $x = 0$, $x = 2$.

c)semnul derivatei

x	$-\infty$ 0 2 $+\infty$
$f'(x)$	---------------------------- 0 + + + + + + + + + + 0---------------------------

$f'(x) < 0$ la stânga lui $x = 0$ şi $f'(x) > 0$ la dreapta lui $x = 0$ $\Rightarrow$ $x = 0$ punct de minim

$f'(x) > 0$ la stânga lui $x = 2$ şi $f'(x) < 0$ la dreapta lui $x = 2$ $\Rightarrow$ $x = 2$ punct de maxim

2) $y = x^{2/3}$

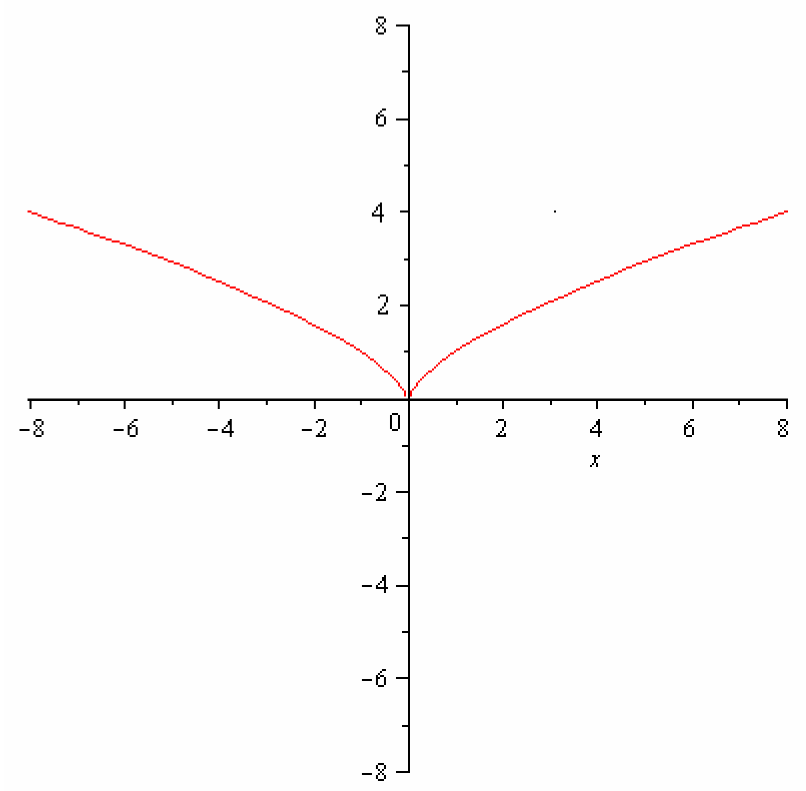


Figura 2.37 $f(x) = x^{2/3}$

a) $y' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

b) $y' = 0$ nu are rădăcini , y' nu există în $x = 0$ deoarece $y'_s(0) = -\infty$ şi $y'_d(0) = +\infty$

Funcția are un singur punct critic $x = 0$.

c) semnul derivatei

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	--		++++++++++++++++++++

$f'(x) < 0$ la stânga lui $x = 0$ şi $f'(x) > 0$ la dreapta lui $x = 0$ $\Rightarrow$ $x = 0$ punct de minim

3) $y = x^3$

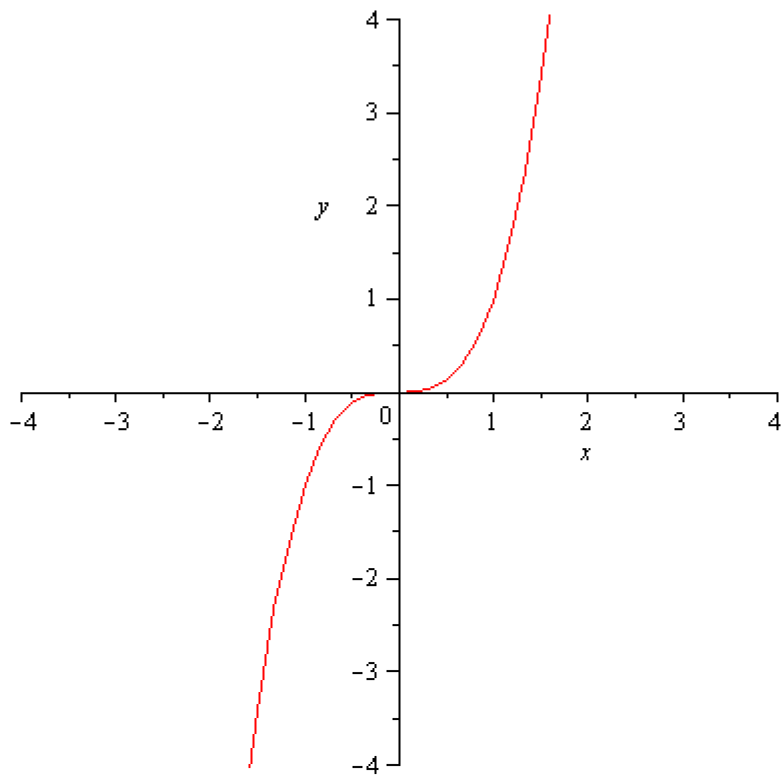


Figura 2.38 $f(x) = x^3$

a) $y' = 3x^2$

b) $y' = 0 \Rightarrow$ puncte critice $x = 0$

c) $f'(x) = 3x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow$ derivata este pozitivă şi la stânga şi la dreapta lui $x = 0$ $\Rightarrow$ funcţia nu are extrem.

Derivata secundă în investigarea punctelor de extrem

O condiţie suficientă de extrem este dată de teorema următoare.

Teorema 4: Fie $f(x)$ o funcţie care are prima şi a doua derivată în x_0 astfel încât $f'(x_0) = 0$ şi $f''(x_0) \neq 0$. Atunci, funcţia are în x_0 un maxim dacă $f''(x_0) < 0$ şi un minim dacă $f''(x_0) > 0$.

Procedeu de investigare a punctelor de extrem:

a) determinarea punctelor critce

b) calcularea derivatei secunde $f''(x)$ într-un punct critic x_0 şi al semnului derivatei secunde, dacă aceasta există. Dacă $f''(x_0) < 0$, atunci funcția are maxim în x_0 şi dacă $f''(x_0) > 0$ funcția are minim în x_0.

Dacă $f''(x)$ este fie nulă fie nu există, atunci putem decide asupra punctului de extrem cu prima derivată.

Exemplu: $y = e^{-x^2}$

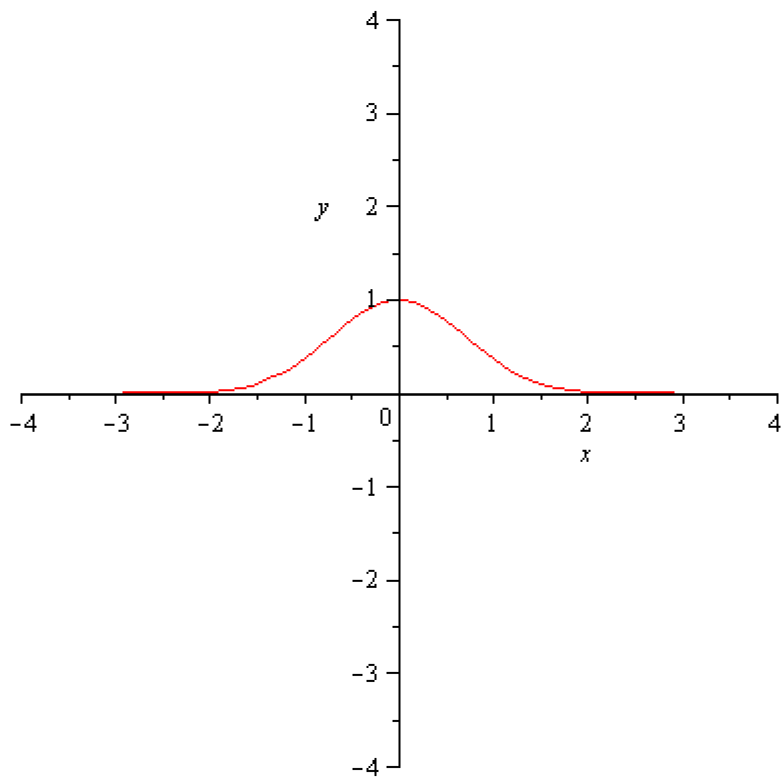


Figura 2.39 $f(x) = e^{-x^2}$

$y' = -2xe^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad x = 0$ punct critic

$y'' = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}(-2x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \qquad y''(0) = -2 < 0$

Atunci, funcția are maxim în $x = 0$.

2.17 Convexitatea. Forma unei curbe. Puncte de inflexiune

Fie o curbă definită de funcția $y = f(x)$ şi fie $f'(x_0)$ derivata finită a funcției în punctul x_0 astfel, curba admite tangentă în $M_0(x_0, f(x_0))$, tangentă care nu este paralelă cu axa *Oy*.

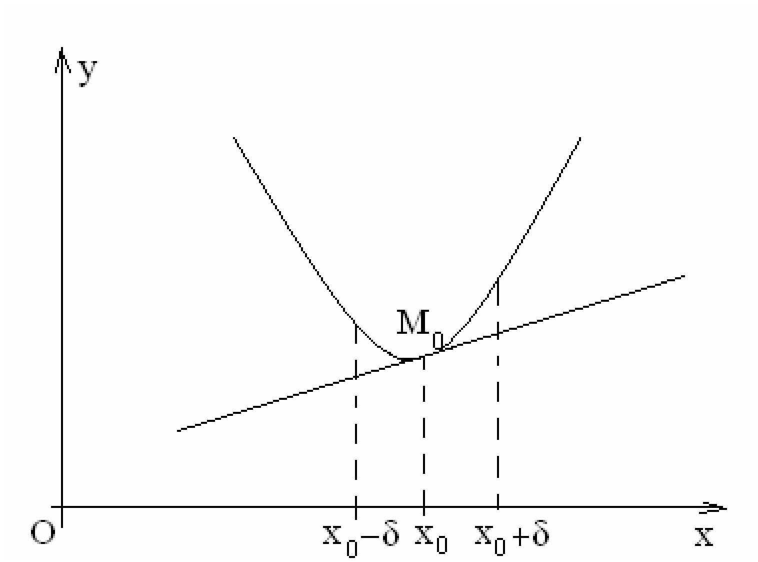


Figura 2.40

Definiții:

- O curbă este *convexă* într-un punct M_0 dacă există o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a punctului x_0 astfel încât toate punctele curbei cu abscisele conținute în $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ să se afle deasupra tangentei la curbă în punctul M_0 (figura 2.40).

- O curbă este *concavă* într-un punct M_0 dacă există o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a punctului x_0 astfel încât toate punctele curbei cu abscisele conținute în $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ să se afle sub tangenta la curbă în punctul M_0 (figura 2.41).

- Fie $y = f(x)$ o funcție diferențiabilă pe (a,b). Spunem că graficul lui $y = f(x)$ este *convex* (*concav*) pe (a,b) dacă graficul se află deasupra (dedesubt) de tangenta la curba $y = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$.

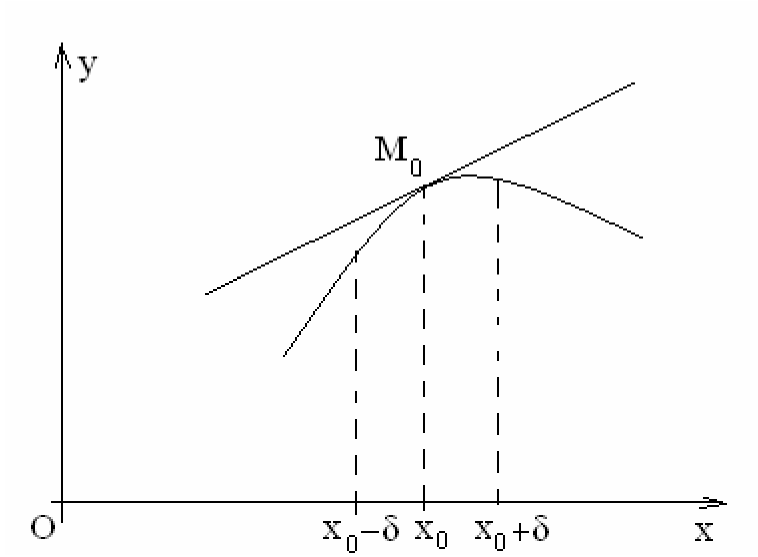


Figura 2.41

- Punctul $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ se numeşte *punct de inflexiune* al curbei $y = f\left(x\right)$ dacă există o vecinătate $\left(x_0 - \delta, x_0 + \delta\right)$ a punctului x_0 astfel încât curba este concavă $\forall x \in \left(x_0 - \delta, x_0\right)$ şi convexă $\forall x \in \left(x_0, x_0 + \delta\right)$ sau vice versa.

Observație: $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ este *punct de inflexiune* dacă la stânga şi la dreapta punctului curba se află în semiplane diferite față de tangenta la curbă în M_0.

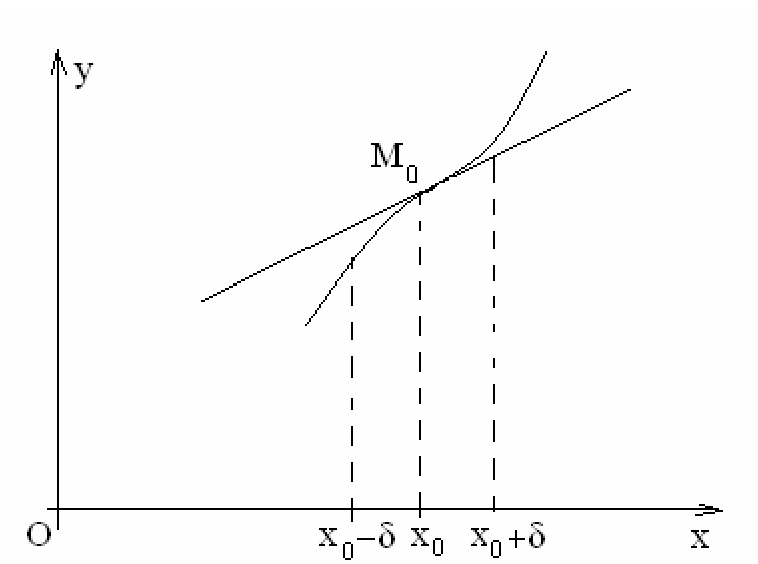


Figura 2.42

Procedeu analitic de investigare a convexității şi a punctelor de inflexiune

Considerăm un punct de pe curba $y = f(x)$ şi un punct de pe tangenta la curba $y = f(x)$ în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$. Presupunem că aceste puncte au aceeaşi abscisă x şi fie y ordonata punctului ales pe curbă şi Y ordonata punctului ales pe tangentă. Evident, dacă $y - Y > 0$, $\forall x \neq x_0$ dintr-o vecinătate a punctului x_0, curba este convexă în M_0 şi dacă $y - Y < 0$, $\forall x \neq x_0$ dintr-o vecinătate a punctului x_0, curba este concavă în M_0.

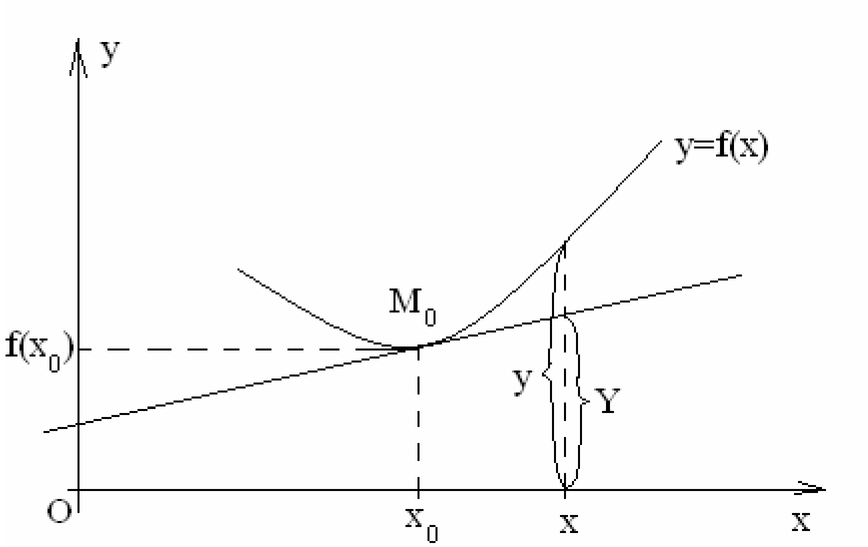


Figura 2.43

Pentru a determina convexitatea curbei în M_0 este suficient să investigăm semnul diferenței $y - Y$ pe o vecinătate a punctului x_0.

Ecuația tangentei este

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad y - Y = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] =$$

$$= [f(x) - f(x_0)] - f'(x_0)(x - x_0)$$

Notăm: $h = x - x_0$

$$\Rightarrow \quad y - Y = [f(x_0 + h) - f(x_0)] - f'(x_0) \cdot h$$

Presupunem că funcția admite derivată secundă $f''(x)$ în x_0 şi pe o vecinătate a lui x_0. Aplicăm teorema Lagrange în ultima relație:

$$f'(x_0+\theta\cdot h)h-f'(x_0)h=\left[f'(x_0+\theta\cdot h)-f'(x_0)\right]h$$

unde $\theta=\theta(h)$ şi $0<\theta<1$.

Atunci:

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}$$

Considerăm $\Delta x=\theta\cdot h$

$$f''(x_0)=\lim_{\theta h\to 0}\frac{f'(x_0+\theta\cdot h)-f'(x_0)}{\theta\cdot h}$$

Cu teorema 1 de la operații cu limite putem scrie:

$$\frac{f'(x_0+\theta\cdot h)-f'(x_0)}{\theta\cdot h}=f''(x_0)+\alpha(\theta h)$$

$$f'(x_0+\theta\cdot h)-f'(x_0)=f''(x_0)\theta\cdot h+\alpha(\theta\cdot h)\theta\cdot h$$

unde $\alpha(\theta\cdot h)\to 0$ pentru $h\to 0$.

In concluzie,

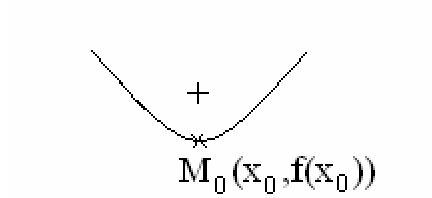
$$y-Y=\left[f''(x_0)+\alpha(\theta\cdot h)\right]\theta\cdot h^2$$

Fie $f''(x_0)\neq 0$. Deoarece $\alpha(\theta\cdot h)$ este un infinitezimal pentru $h\to 0$, există $\delta>0$ astfel încât $f''(x_0)+\alpha(\theta\cdot h)$ are acelaşi semn cu $f''(x_0)$ pe $(x_0-\delta,x_0+\delta)$. Mai mult, $\theta\cdot h^2>0$.

Dacă $f''(x_0)>0 \Rightarrow y-Y>0$ pentru *x* suficient de aproape de x_0. Curba este convexă în $M_0(x_0,f(x_0))$.

Dacă $f''(x_0)<0 \Rightarrow y-Y<0$ pentru *x* suficient de aproape de x_0. Curba este concavă în $M_0(x_0,f(x_0))$.

$f''(x_0)>0 \quad \Rightarrow$



$f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow$

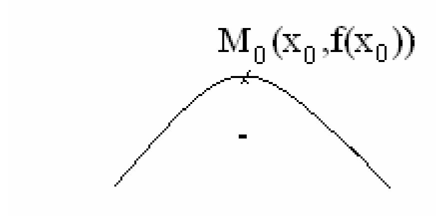


Figura 2.44

Condiție necesară pentru punct de inflexiune: $M_0(x_0, f(x_0))$ poate fi punct de inflexiune pentru curba $y = f(x)$ doar dacă $f''(x_0) = 0$ sau dacă $f''(x_0)$ nu există.

Această condiție nu este suficientă.

Exemplu: $f(x) = x^4 \quad f''(x) = 12x^2 \quad f''(0) = 0$

Totuşi punctul $x_0 = 0$ nu este punct de inflexiune pentru funcție. In acest punct curba este convexă.

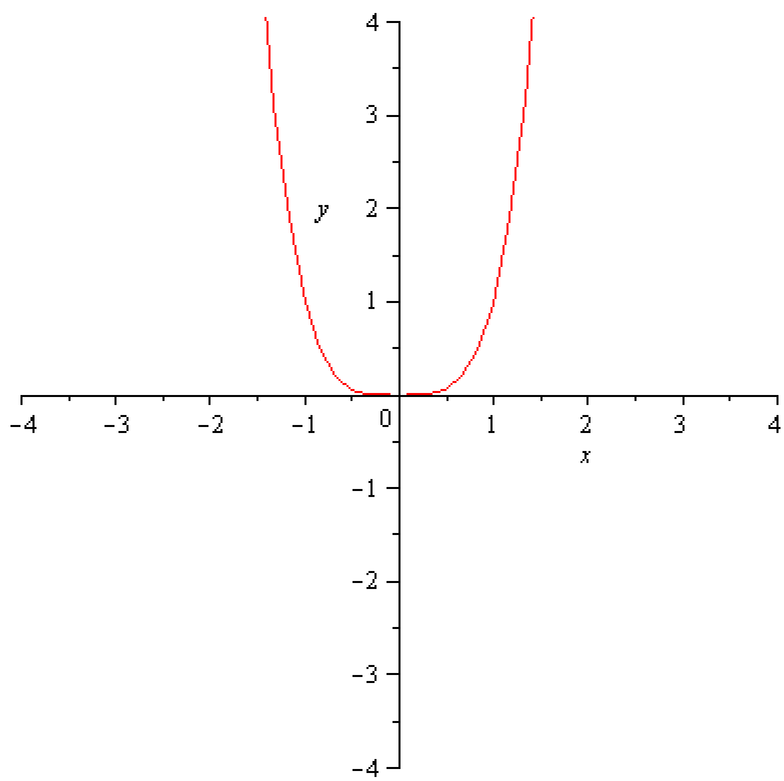


Figura 2.45 $f(x) = x^4$

O condiție suficientă pentru inflexiune este conținută în torema următoare.

Teorema 1: Fie $y = f(x)$ o funcție care are derivată secundă pe o vecinătate a punctului x_0 şi aceasta este continuă în x_0. Atunci, punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ este punct de inflexiune al curbei $y = f(x)$ dacă $f''(x_0) = 0$ şi derivata secundă îşi schimbă semnul în x_0 când x trece prin x_0.

Observație: Este posibil ca în punctul de inflexiune x_0, tangenta la curba $y = f(x)$ să fie verticală, adică paralelă cu axa Oy, astfel încât $f''(x)$ nu există în punctul x_0.
Exemplu:

$$f(x) = x^{1/3} \qquad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \qquad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$$

Derivata secundă $f''(x)$ nu se anulează în nici un punct şi în $x = 0$ derivata secundă nu există. Investigăm semnul derivatei secunde pe o vecinătate a lui $x = 0$.

$$\begin{cases} f''(x) > 0, & \forall x \in (-\delta, 0) \\ f''(x) < 0, & \forall x \in (0, \delta) \end{cases}$$

Curba este convexă la stânga lui zero şi concavă la dreapta lui zero, deci punctul $x = 0$ este punct de inflexiune.

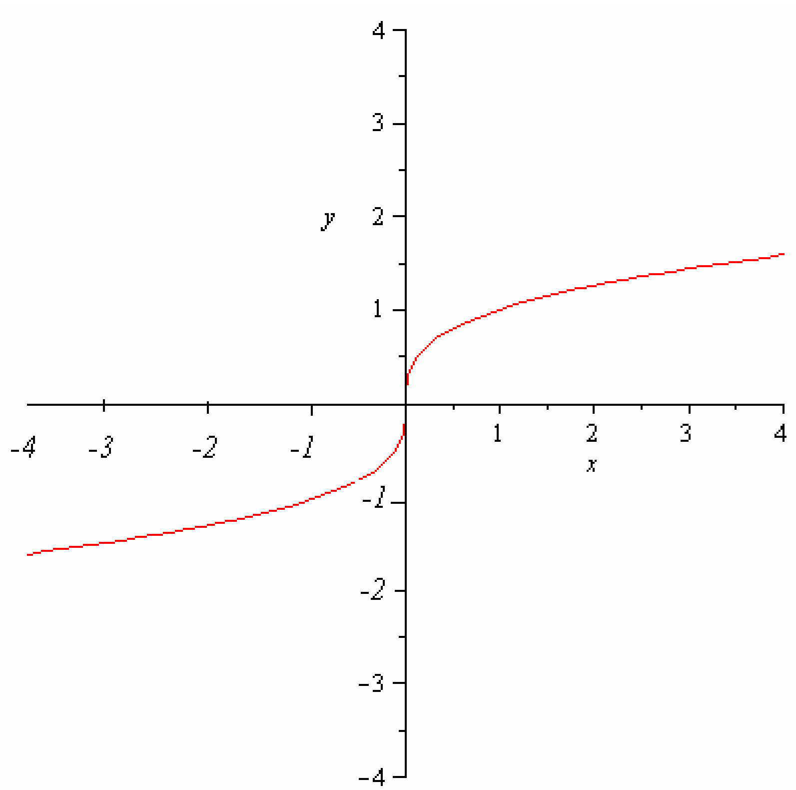


Figura 2.46 $f(x) = x^{1/3}$

Condiție suficientă pentru punct de inflexiune:

Fie $y = f(x)$ o funcție care are derivată secundă continuă pe o vecinătate a punctului x_0 cu o posibilă excepție în x_0. Atunci, punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ este punct de inflexiune al curbei $y = f(x)$ dacă $f''(x_0) = 0$ sau nu există şi derivata secundă îşi schimbă semnul în x_0 când x trece prin x_0.

2.18 Asimptote

Considerăm o curbă $y = f(x)$ care are ramură la infinit. O asimptotă a unei ramuri la infinit este o dreaptă pentru care distanța δ dintre un punct *M* de pe curbă şi dreaptă tinde la zero când *M* se îndepărtează la infinit față de originea sistemului de coordonate.

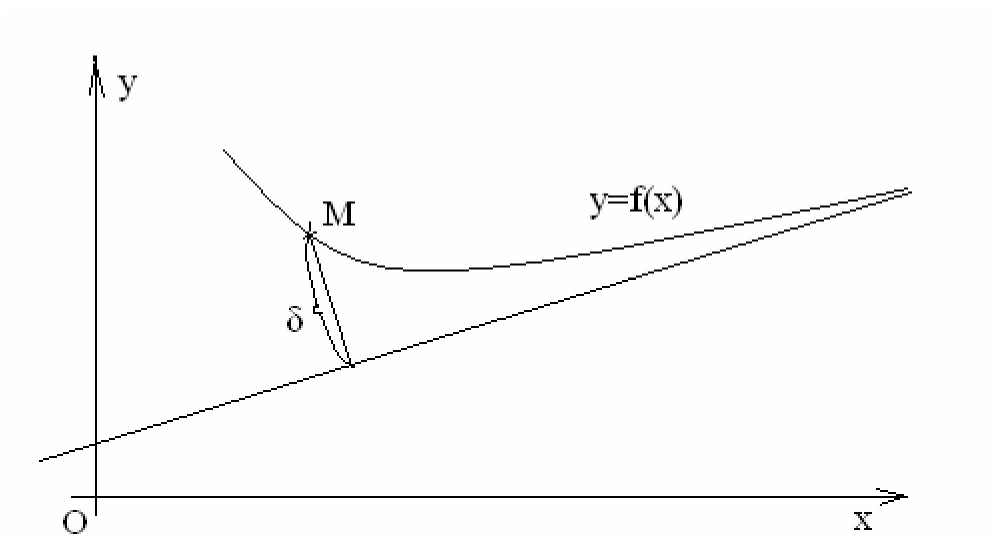


Figura 2.47

Asimptote verticale

Dreapta $x = x_0$ este *asimptotă verticală* la graficul funcției $y = f(x)$, dacă cel puțin una din limitele următoare au loc:

$$\lim_{x \to x_0, x < x_0} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to x_0, x > x_0} f(x) = \pm\infty$$

Exemplu:

$y = \frac{1}{x}$ are asimptota verticală $x = 0$, deoarece

$$\lim_{x \to 0, x < 0} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0, x > 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

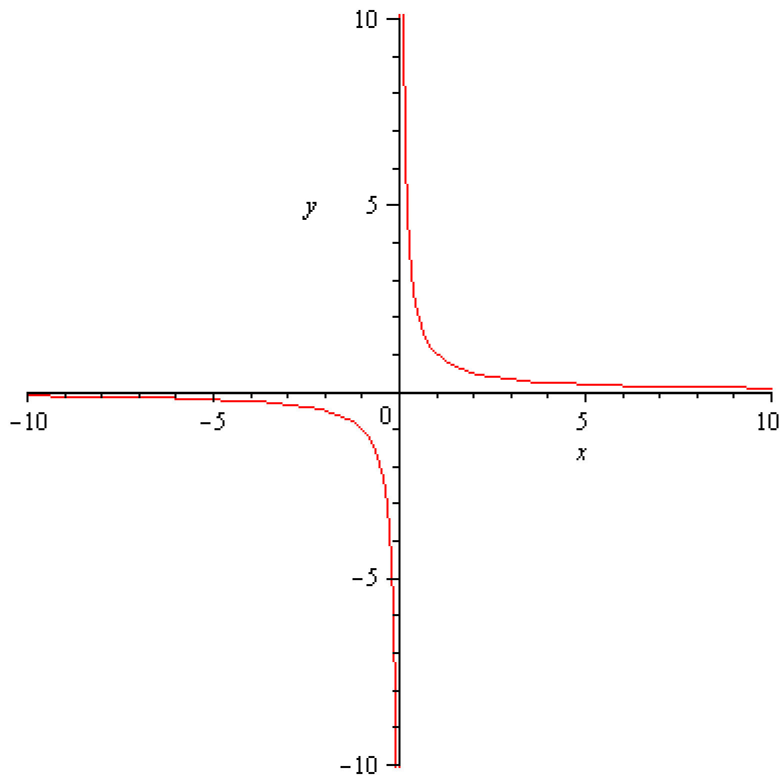


Figura 2.48 $f(x) = \frac{1}{x}$

Poziții posibile pentru o curbă şi asimptotele sale verticale:

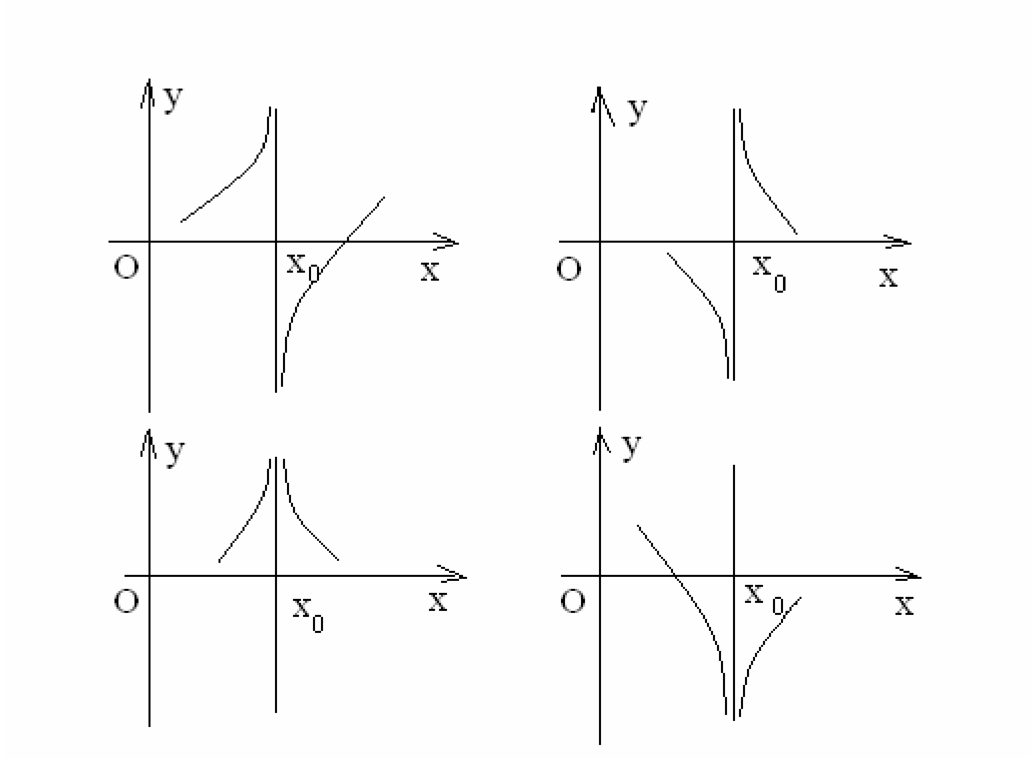


Figura 2.49

Procedeu de determinare al asimptotelor verticale

a) Determinăm punctele de discontinuitate ale funcției $y = f(x)$.

b) Selectăm acele discontinuități în care cel puțin una dintre limitele laterale ale funcției $y = f(x)$ este $\pm\infty$. Fie acestea x_1, x_2, …, x_m. Atunci dreptele $x = x_1$, $x = x_2$, …, $x = x_m$ vor fi asimptote verticale la graficul $y = f(x)$.

Exemplu:

$y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ are asimptotele verticale $x = -1$, $x = +1$.

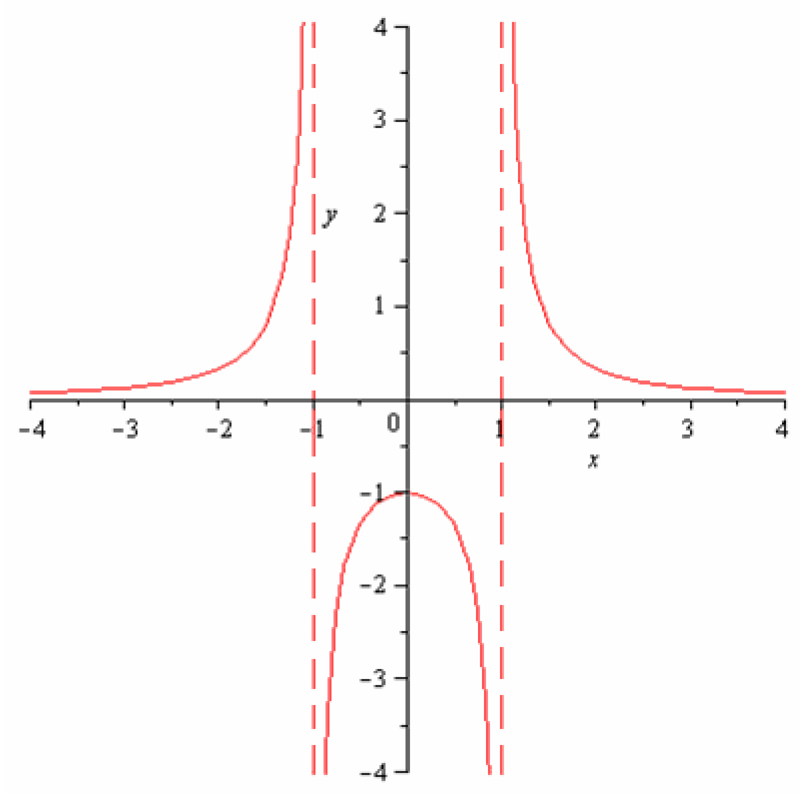


Figura 2.50 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

Observație:

Dacă x_0 este capăt de interval pe care este definită funcția $y=f(x)$, atunci dreapta $x=x_0$ poate fi asimptotă verticală dacă limita laterală corespunzătoare este infinită.

Exemplu:

$$y=\ln x\,,\quad \forall x\in(0,+\infty)$$

$\lim\limits_{x\to 0,x>0}\ln x=-\infty\,,\ \Rightarrow\ \ x=0$ (axa Oy) este asimptotă verticală.

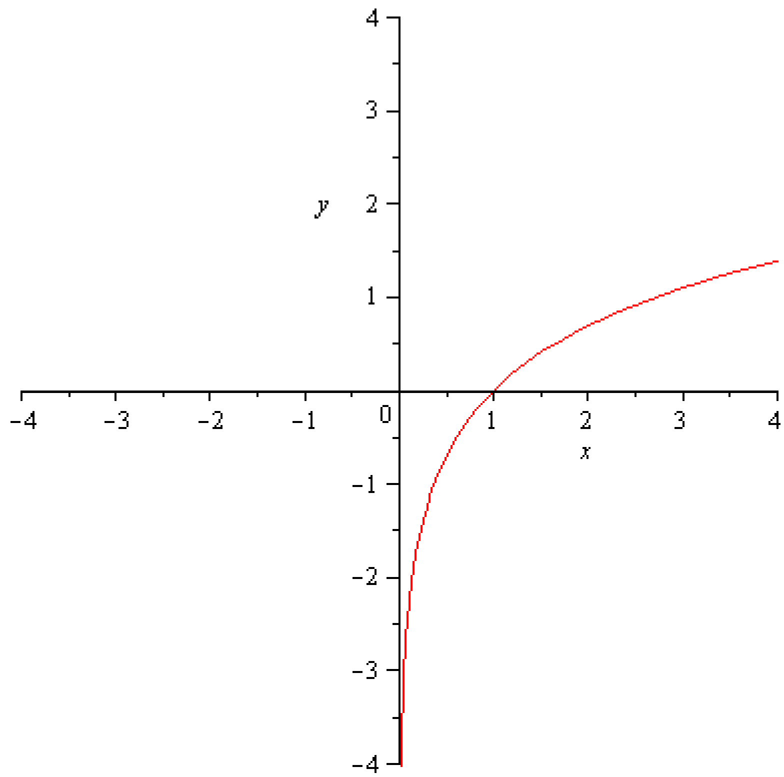


Figura 2.51 $f(x) = \ln x$

Asimptote oblice

Presupunem dreapta $y = ax + b$ asimptotă oblică la graficul funcției $y = f(x)$. Prin definiție, distanța δ de la punctul $M(x, f(x))$ de pe curba $y = f(x)$, la dreapta $y = ax + b$ tinde la zero pentru $x \to +\infty$. Fie $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ unghiul dintre asimptotă şi abscisă.

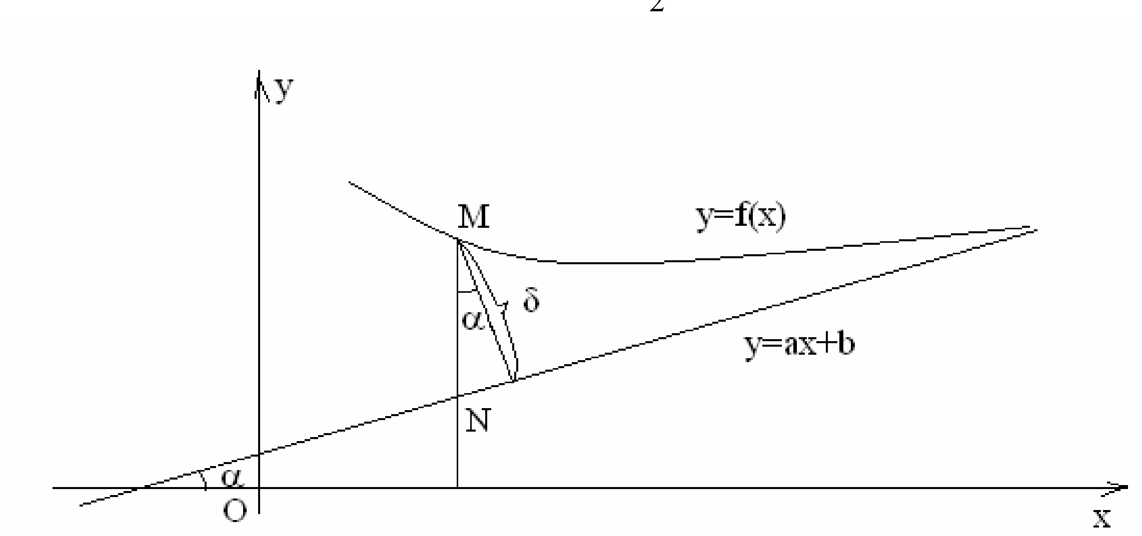


Figura 2.52

$$\delta = |MN| \cos\alpha$$

Deoarece $\cos\alpha \neq 0$, atunci $|MN| \to 0$, $\delta \to 0$ pentru $x \to +\infty$

$$|MN| = |f(x) - ax - b|$$

Adică, dreapta $y = ax + b$ este asimptotă oblică la graficul funcției $y = f(x)$ dacă şi numai dacă

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - ax - b \right) = 0$$

Cu teorema 1 de la operații cu limite $f(x) - ax - b$ admite o reprezentare de forma:

$$f(x) - ax - b = 0 + \alpha(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$$

$$f(x) = ax + b + \alpha(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$$

Observație: Dacă există o asimptotă $y = ax + b$ la curba $y = f(x)$ pentru $x \to +\infty$, atunci funcția $y = f(x)$ este *aproape* o funcție liniară pentru $x \to +\infty$, adică $y = f(x)$ diferă de $y = ax + b$ printr-un infinitezimal pentru $x \to +\infty$.

Teorema 1: Pentru ca graficul funcției $y = f(x)$ să aibă asimptotă oblică $y = ax + b$ pentru $x \to +\infty$ este necesar şi suficient ca să existe limitele:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad \text{şi} \qquad \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - ax \right] = b$$

Exemplu:

$$y = \frac{x^2}{x-1}, \quad x \neq 1$$

$x = 1$ asimptotă verticală

$$y = f(x) = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

$\frac{1}{x-1} \to 0$ pentru $x \to \infty$

Astfel, $f(x) = x + 1 + \alpha(x)$ unde $\alpha(x) = \frac{1}{x-1}$ este infinitezimal pentru $x \to \infty$

Şi, graficul funcţiei $y = \frac{x^2}{x-1}$ are asimptota oblică $y = x + 1$.

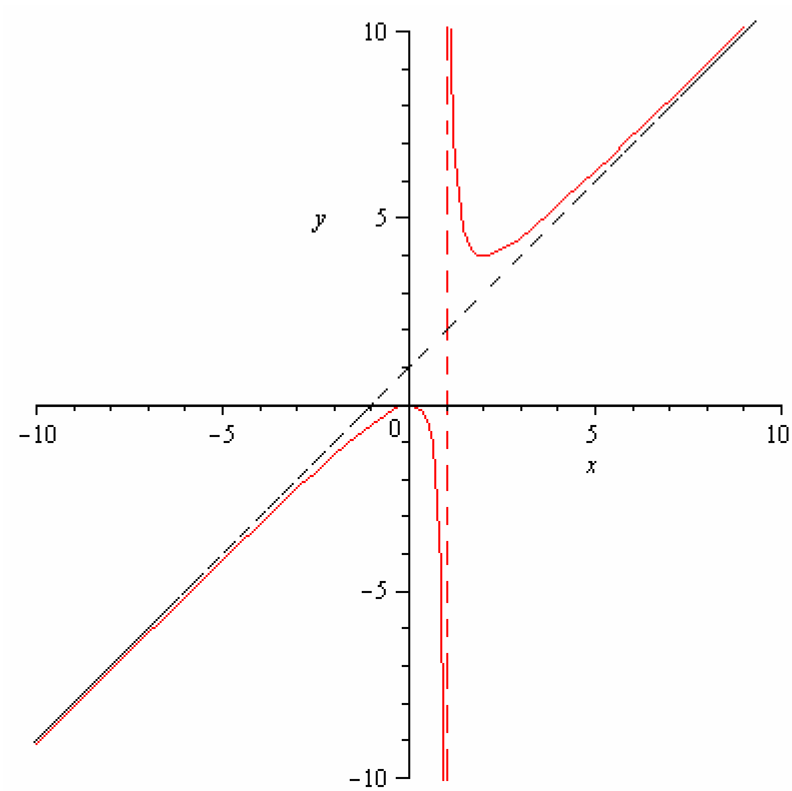


Figura 2.53 $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

Asimptote orizontale

Dacă funcţia $y = f(x)$ are limita finită $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$, atunci dreapta $y = b$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei.

Observaţie: Asimptota orizontală este caz particular de asimptotă oblică cu $a = 0$.

Exemple:

1) $y = \frac{1}{x}$ $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ atunci $y = 0$ este asimptotă orizontală (figura 2.54)

2) $y = arctg\ x$ (figura 2.55)

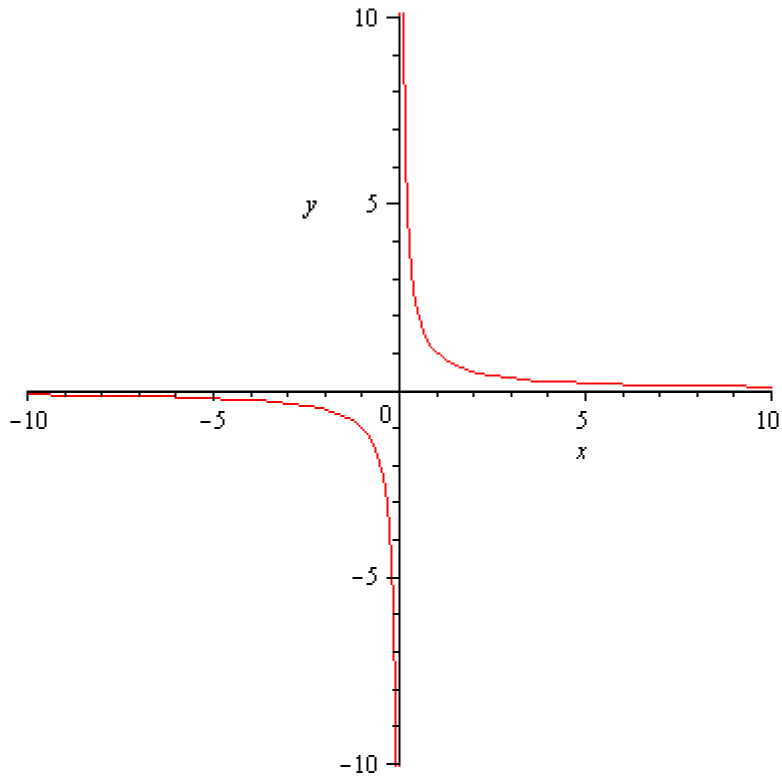


Figura 2.54 $f(x) = 1/x$

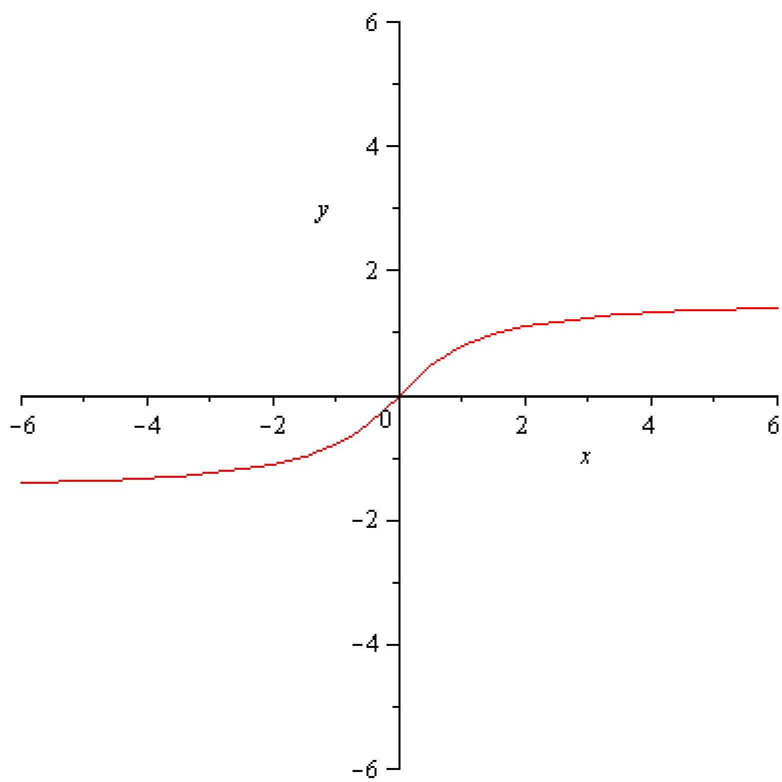


Figura 2.55 $f(x) = arctg\ x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} arctg\ x = \frac{\pi}{2}$ atunci $y = \frac{\pi}{2}$ este asimptotă orizontală la ramura dreaptă

$\lim\limits_{x \to -\infty} arctg\ x = -\frac{\pi}{2}$ atunci $y = -\frac{\pi}{2}$ este asimptotă orizontală la ramura stângă

3) $y = \frac{\sin x}{x}$, $y(0) = 1$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ atunci $y = 0$ este asimptotă orizontală

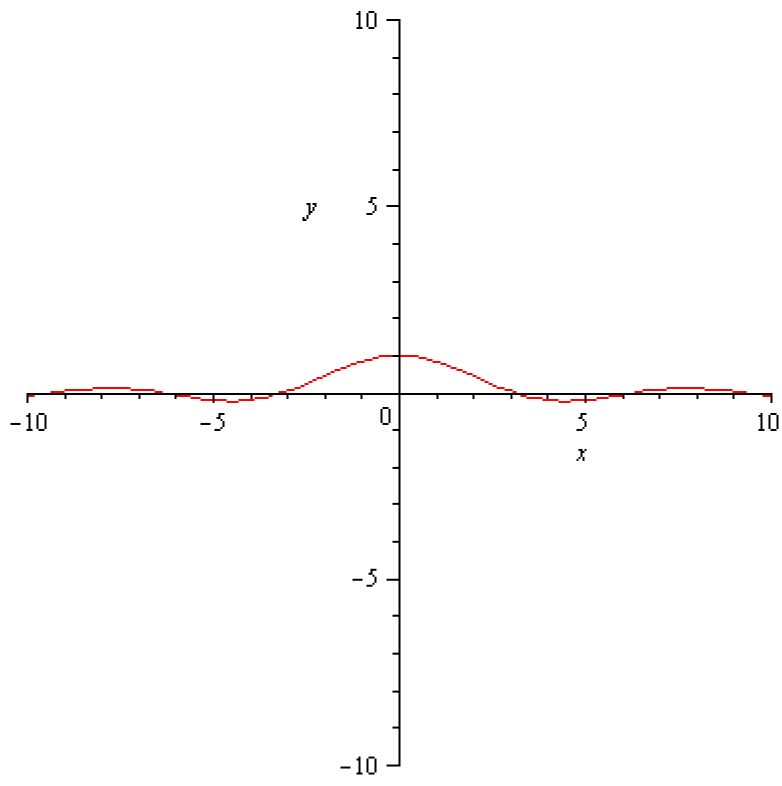


Figura 2.56 $f(x)\frac{\sin x}{x}$

Observație: graficul funcției intersectează asimptota.

2.19 Graficul unei funcții

a) Stabilim domeniul de definiție
b) Stabilim punctele de discontinuitate şi speța acestora. Determinăm asimptotele verticale.
c) Determinăm simetria funcției, adică paritatea şi periodicitatea acesteia.
d) Stabilim punctele de intersecție ale graficului funcției cu axele de coordonate.
e) Analizăm comportarea funcției la infinit. Stabilim asimptotele orizontale şi oblice.
f) Stabilim monotonia funcției şi punctele sale de extrem.
g) Stabilim intervalele de convexitate şi punctele de inflexiune.

Exemple:

1) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

a) domeniul de definiție este $\mathbb{R}$.
b) nu are puncte de discontinuitate şi nici asimptote verticale.
c) funcția este pară deoarece $f(-x) = f(x)$, deci are grafic simetric față de axa *Oy*.
d) $f(0)=1 \Rightarrow$ punctul $(0,1)$ este intersecția cu ordonata.
e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{1+x^2} = 0 \Rightarrow$ dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală.
Nu are asimptote oblice.

f) $y' = -\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\cdot 2x$

$y' > 0$ pentru $x < 0$ strict crescătoare pe $(-\infty, 0)$

$y' < 0$ pentru $x > 0$ strict descrescătoare pe $(0, +\infty)$

$x = 0$ este punct critic, deoarece este soluție a ecuației $y' = 0$
$f'(x)$ schimbă semnul de la pozitiv la negativ când trece prin $x=0$ de la stânga la dreapta deci $x = 0$ este punct de maxim.

g) $y'' = -2\cdot\dfrac{1-3x^2}{\left(1+x^2\right)^3}$

$y''(x)=0$ are soluțiile $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ şi $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$y''<0$ pentru $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ concavă

$y''>0$ pentru $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$ convexă

$x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ şi $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$ puncte de inflexiune

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$	+ + +	+ + +	+ + +	+ + +	0	− − −	− − −	− − −	
$f''(x)$	+ + +	+ + +	0	− − −	2	− − −	0	+ + +	
$f(x)$		$\cup\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\cap\nearrow$	1	$\cap\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\cup\searrow$	

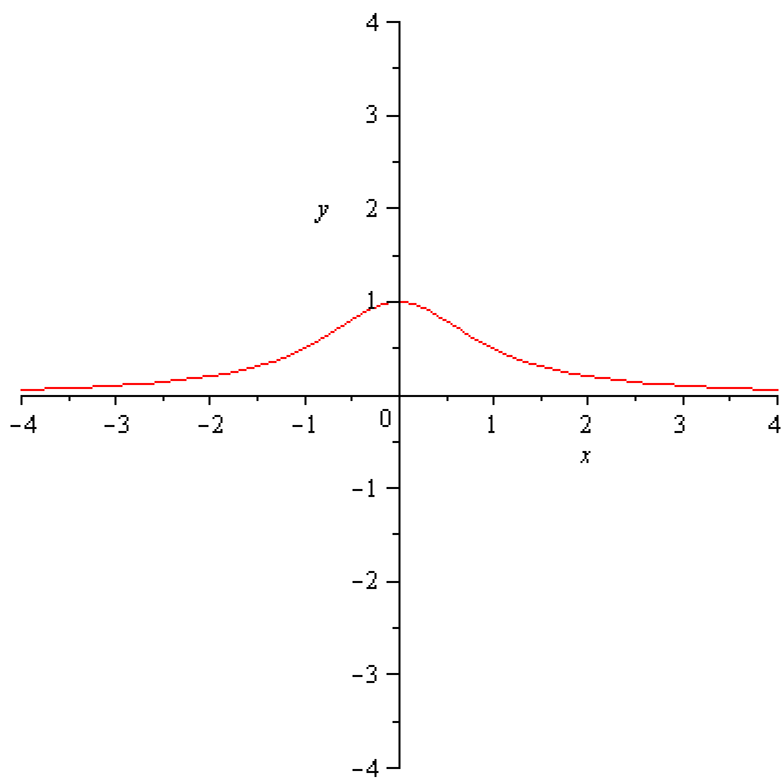


Figura 2.57 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

La următoarele exemple vă invităm să parcurgeți algoritmul şi vă prezentăm doar graficele, drept mijloc de verificare. 2) $y=x^2+\frac{1}{x}$ 3) $y=x+\frac{1}{x^2}$

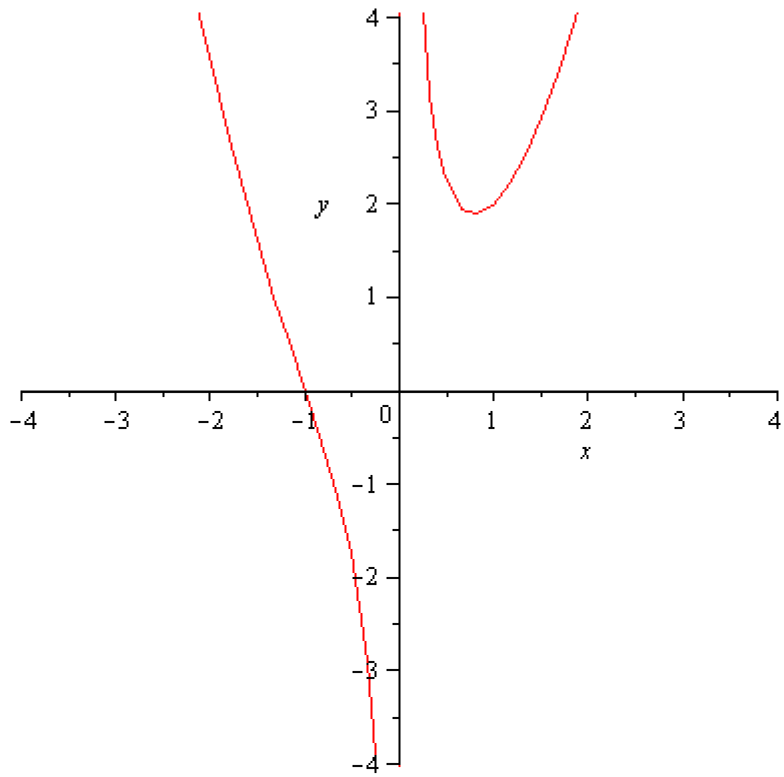


Figura 2.58 $f(x) = x^2 + 1/x$

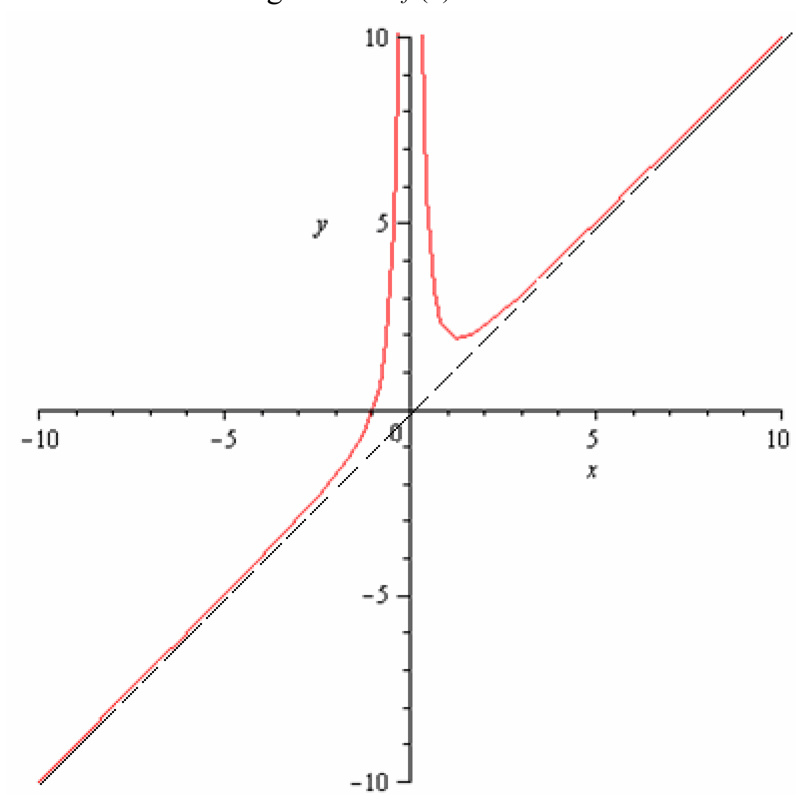


Figura 2.59 $f(x) = x + 1/x^2$

2.20 Teorema Taylor

Formula Taylor pentru polinoame

Fie polinomul de gradul n

$$P(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n, \qquad b_n \neq 0$$

unde $b_0, b_1, b_2 \ldots b_n$ sunt coeficienți constanți.

Polinomul $P(x)$ poate fi exprimat ca o dezvoltare după puterile lui $x - a$, cu alți coeficienți, unde a este un număr arbitrar.

Intr-adevăr, considerăm $x = a + t$ şi

$$P(x) = P(a + t) = b_0 + b_1(a + t) + \ldots + b_n(a + t)^n$$

Dacă dezvoltăm parantezele şi adunăm termenii cu puteri egale în t, putem scrie

$$P(a + t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots + A_n t^n$$

Substituind $t = x - a$ revenim la variabila x:

$$P(x) = A_0 + A_1(x - a) + A_2(x - a)^2 + \ldots + A_n(x - a)^n$$

unde $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sunt coeficienți dependenți de coeficienții inițiali $b_0, b_1, b_2 \ldots b_n$.

Pentru a determina coeficienții $A_0, A_1, \ldots, A_n$ derivăm $P(x)$ de n ori:

$$P'(x) = A_1 + 2A_2(x - a) + 3A_3(x - a)^2 + \ldots + nA_n(x - a)^{n-1}$$

$$P''(x) = 2 \cdot 1A_2 + 3 \cdot 2A_3(x - a) + \ldots + n(n-1)A_n(x - a)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$P^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1A_n$$

Considerăm $x = a$ în $P(x)$ şi în derivatele sale.

$$\begin{aligned}
&P(a) = A_0 \\
&P'(a) = 1!\,A_1 \\
&P''(a) = 2!\,A_2 \\
&\quad\vdots \\
&P^{(n)}(a) = n!\,A_n
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad A_0 = P(a), \qquad A_1 = \frac{P'(a)}{1!}, \qquad A_2 = \frac{P''(a)}{2!} \qquad \ldots \qquad A_n = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}$$

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Această dezvoltare a polinomului $P(x)$ se numeşte *formula lui Taylor* în puterile lui $x-a$, pentru polinomul dat $P(x)$ de gradul *n* sau formula lui Taylor pentru $P(x)$ în punctul *a*.

Dacă considerăm $a = 0$ obținem un caz particular de formulă Taylor

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

care se numeşte *formula lui Maclaurin*.

Exemplu:

Dezvoltați polinomul $P(x) = x^2 - 3x + 2$ după puterile lui *x* şi după puterile lui $x-1$.

Aplicăm formula Maclaurin

$$\begin{aligned}
&P(x) = x^2 - 3x + 2 &&\Rightarrow && P(0) = 2 \\
&P'(x) = 2x - 3 &&\Rightarrow && P'(0) = -3 \\
&P''(x) = 2 &&\Rightarrow && P''(0) = 2
\end{aligned}$$

$$P(x) = 2 - \frac{3}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2$$

In concluzie, dezvoltarea polinomului după puterile lui x este identică cu polinomul.

Aplicăm formula Taylor

$$P(1)=0$$
$$P'(1)=-1$$
$$P''(1)=2$$

$$P(x)=0-\frac{1}{1!}(x-1)+\frac{2}{2!}(x-1)^2=-(x-1)+(x-1)^2$$

Formula lui Taylor pentru funcții arbitrare

Considerăm o funcție $f(x)$ definită pe o vecinătate a punctului $x=a$. Funcția poate să nu fie un polinom de gradul $n-1$, dar se presupune că are derivate până la ordinul n pe această vecinătate.

Calculăm valorile $f(a), f'(a), \ldots, f^{(n-1)}(a)$ şi le utilizăm la construcția funcției:

$$Q_{n-1}(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

$Q_{n-1}(x)$ este polinomul Taylor de ordinul $n-1$ pentru funcția $f(x)$.

Observație: Dacă funcția inițială $f(x)$ este polinom de gradul $n-1$, atunci are loc identitatea $f(x)\equiv Q_{n-1}(x)$ pentru orice x din vecinătatea din definiție.

Cum, în general, $f(x)$ nu este polinom de gradul $n-1$, considerăm:

$$f(x)=Q_{n-1}(x)+R_n(x)$$

Această egalitate se numeşte *formula lui Taylor pentru* $f(x)$ *în vecinătatea punctului* $x=a$ sau formula lui Taylor pentru $f(x)$ în punctul $x=a$, iar $R_n(x)$ se numeşte *restul de ordinul n al seriei Taylor.*

Restul $R_n(x)$ poate fi exprimat funcție de derivata de ordinul n a funcției $f(x)$.

Intr-adevăr, presupunem că $f(x)$ nu este un polinom de gradul $n-1$ şi presupunem că are derivate continue până la ordinul $n-1$ pe $[a,b]$ şi că există derivata de ordinul n a lui $f(x)$ pe (a,b).

Considerăm $x=b$ în formula lui Taylor pentru $f(x)$ în punctul $x=a$:

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+R_n$$

Considerăm

$$R_n=M(b-a)^n$$

unde M este o cantitate care trebuie definită. Pentru aceasta considerăm o funcție auxiliară definită pe $[a,b]$ prin formula:

$$\varphi(x)=f(b)-\left[f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(b-x)+\frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}+M(b-x)^n\right]$$

Funcția $\varphi(x)$ satisface condițiile din teorema Rolle:

a) este continuă pe $[a,b]$ deoarece funcția inițială $f(x)$ şi toate derivatele sale până la ordinul $n-1$ sunt continue pe $[a,b]$.
b) funcția are derivată pe (a,b) deoarece funcția inițială $f(x)$ are derivată de ordinul n pe (a,b).
c) funcția ia valori egale la capetele lui $[a,b]$, $\varphi(a)=0$ şi $\varphi(b)=0$.

Cu teorema lui Rolle $\Rightarrow$ $\exists\xi\in(a,b)$ astfel încât $\varphi'(\xi)=0$.

$$\varphi'(x)=-\left[f'(x)-\frac{f'(x)}{1!}+\frac{f''(x)}{1!}(b-x)-\frac{f''(x)}{2!}2(b-x)+\frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2+\ldots\right.$$
$$\left.-\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(n-1)(b-x)^{n-2}+\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}-Mn(b-x)^{n-1}\right]$$

$$\varphi'(x) = -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + Mn(b-x)^{n-1}$$

$$\varphi'(\xi) = -(b-\xi)^{n-1}\left[\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} - Mn\right] = 0$$

Deoarece $\xi \neq b$ ($\xi \in (a,b)$)

$$\Rightarrow \qquad M = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

$$R_n = M(b-a)^n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n, \quad \xi \in (a,b)$$

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$$

Aceasta este formula Taylor pentru $f(x)$ şi

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n, \quad \xi \in (a,b)$$

este restul de ordinul *n* în forma Lagrange.

Caz particular: $n = 1$

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(\xi)}{1!}(b-a)$$

Sau

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) \qquad \text{formula lui Lagrange}$$

Formula Taylor rămâne validă pentru orice puncte x_0 şi x din $[a,b]$ astfel încât putem scrie formula lui Taylor în forma:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + R_n(x)$$

unde

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \text{unde } \xi\in(x_0,x)$$
$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n, \quad 0<\theta<1$$

Considerând $x_0=0 \Rightarrow$ formula Maclaurin

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n(x)$$

unde $R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$, $0<\theta<1$

Restul în formula Taylor poate fi reprezentat şi în forma Peano. Astfel, am presupus că $f(x)$ are derivată de ordinul n pe o vecinătate a lui x_0. Acum presupunem şi că această derivată este continuă în x_0.
Atunci:

$$f^{(n)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)=f^{(n)}(x_0)+\alpha(x), \qquad \alpha(x)\to 0,\ x\to x_0$$

Restul

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n$$

se poate scrie

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{\alpha(x)(x-x_0)^n}{n!}, \quad \alpha(x)\to 0,\ x\to x_0$$

Obs: $\quad \frac{\alpha(x)(x-x_0)^n}{n!}=o\left((x-x_0)^n\right),\ x\to x_0$

adică $\alpha(x)(x-x_0)^n/n!$ este infinitezimal relativ la $(x-x_0)^n$ sau este un infinitezimal de ordin mai mare decât $(x-x_0)^n$ pentru $x\to x_0$.

Formula Taylor devine:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right),\ x\to x_0$$

şi se numeşte formulă Taylor cu restul în formă Peano.

Observație: Eroarea de aproximație a lui $f(x)$ cu formula lui Taylor este un infinitezimal de ordin mai mare decât $(x-x_0)^n$ pentru $x\to x_0$. Această formulă este potrivită atunci când vrem să aproximăm $f(x)$ în puncte suficient de apropiate de x_0. Din acest motiv se numeşte formula Taylor locală.

În rezumat,

Fie funcția $f(x)$ cu derivate continue până la ordinul n pe intervalul (a,b) şi fie $x,x_0\in(a,b)$ atunci are loc:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+R_n(x)$$

unde

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,\quad \text{unde } \xi\in(x_0,x)$$

$$\xi=x_0+\theta(x-x_0),\quad \theta\in(0,1)$$

Caz particular:

$x_0=0 \Rightarrow$ formula Maclaurin

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n(x)$$

unde $R_n(x)=\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$, $0<\theta<1$

Formula Maclaurin pentru câteva funcții elementare

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, \qquad 0 < \theta < 1$$

Formula Maclaurin o utilizăm la aproximarea unor funcții elementare în apropierea originii.

1) $f(x) = e^x$ $\qquad f(x) = e^x \qquad f(0) = 1$

$$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$f^{(n-1)}(x) = e^x \qquad f^{(n-1)}(0) = 1$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad f^{(n)}(\theta x) = e^{\theta x}$$

Cu formula Maclaurin obținem:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n, \qquad 0 < \theta < 1$$

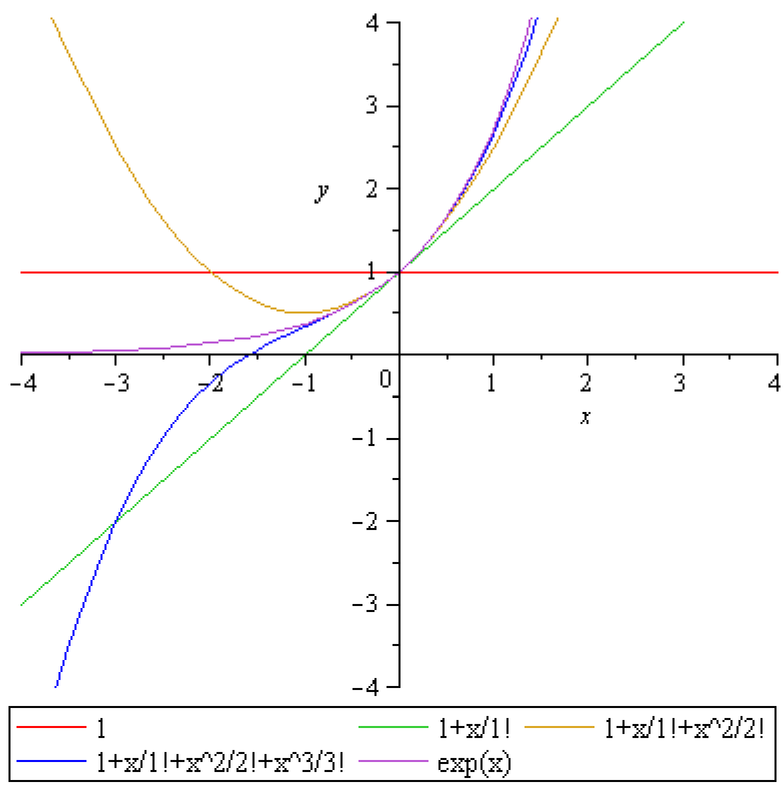


Figura 2.60 $f(x) = \exp(x)$ şi diverse aproximații

Considerăm $x=1$

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{e^{\theta}}{n!}, \quad 0<\theta<1$$

Cum $\quad 0<\frac{e^{\theta}}{n!}<\frac{3}{n!}$

suma $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}$ aproximează numărul e şi aproximația are eroarea mai mică decât $\frac{3}{n!}$.

2) $f(x)=\sin x$

$$\begin{aligned} f(x)&=\sin x & f(0)&=0\\ f'(x)&=\cos x & f'(0)&=1\\ f''(x)&=-\sin x & f''(0)&=0\\ f'''(x)&=-\cos x & f'''(0)&=-1 \end{aligned}$$

In general,

$$f^{(m)}(x)=\sin\left(x+m\frac{\pi}{2}\right) \qquad f^{(m)}(0)=\sin m\frac{\pi}{2}=\begin{cases} 0, m=2k\\ (-1)^k, m=2k+1\end{cases}$$

$$f^{(n)}(\theta x)=\sin\left(\theta x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

Observație: termenii cu puteri pare în *x* se anulează.

Aplicăm formula Maclaurin şi considerăm $n=2k+1$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_{2k+1}(x)$$

$$R_{2k+1}(x)=\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\sin\left(\theta x+(2k+1)\frac{\pi}{2}\right), \quad 0<\theta<1$$

Observație:

$$\left|R_{2k+1}(x)\right|\le\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

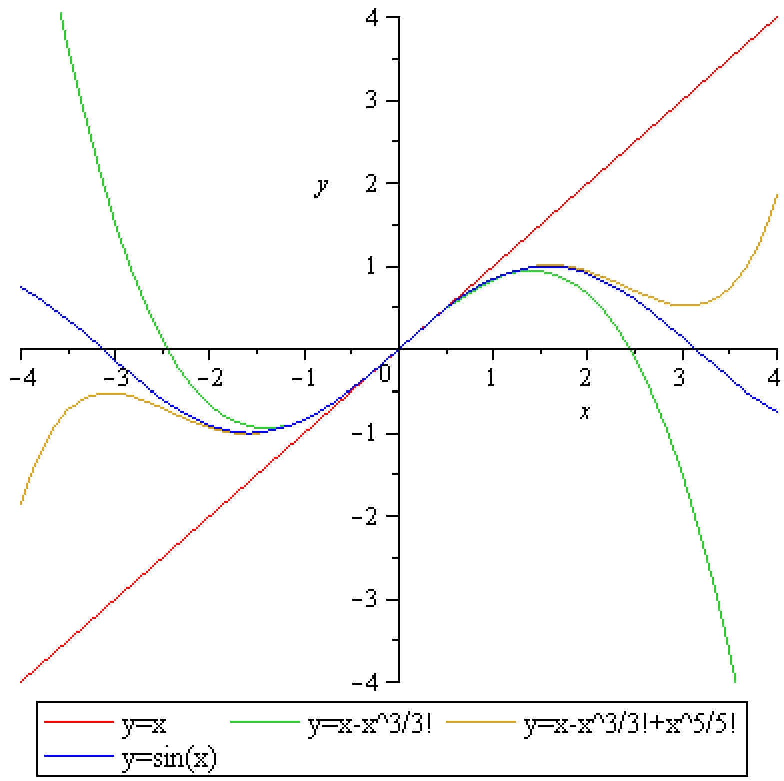


Figura 2.61 $f(x)=\sin x$ şi aproximaţiile acesteia

3) $f(x)=\cos x$

$$f(x)=\cos x \qquad f(0)=1$$

$$f'(x)=-\sin x \qquad f'(0)=0$$

$$f''(x)=-\cos x \qquad f''(0)=-1$$

In general

$$f^{(m)}(x)=\cos\left(x+m\frac{\pi}{2}\right) \qquad f^{(m)}(0)=\cos m\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0, m=2k+1\\(-1)^k, m=2k\end{cases}$$

$$f^{(n)}(\theta x)=\cos\left(\theta x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

Aplicăm formula Maclaurin şi considerăm $n=2k+2$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+R_{2k+2}(x)$$

$$R_{2k+2}(x)=\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cos\left(\theta x+(2k+2)\frac{\pi}{2}\right), \qquad 0<\theta<1$$

Observație:

$$\left|R_{2k+2}(x)\right| \leq \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

Formulele Maclaurin pentru $\sin x$ și $\cos x$ sunt utile când vrem să aproximăm aceste funcții cu erori predefinite. Aproximațiile Taylor pentru $\sin x$ și $\cos x$ pe o vecinătate a lui $x = 0$ sunt prezentate în graficele următoare.

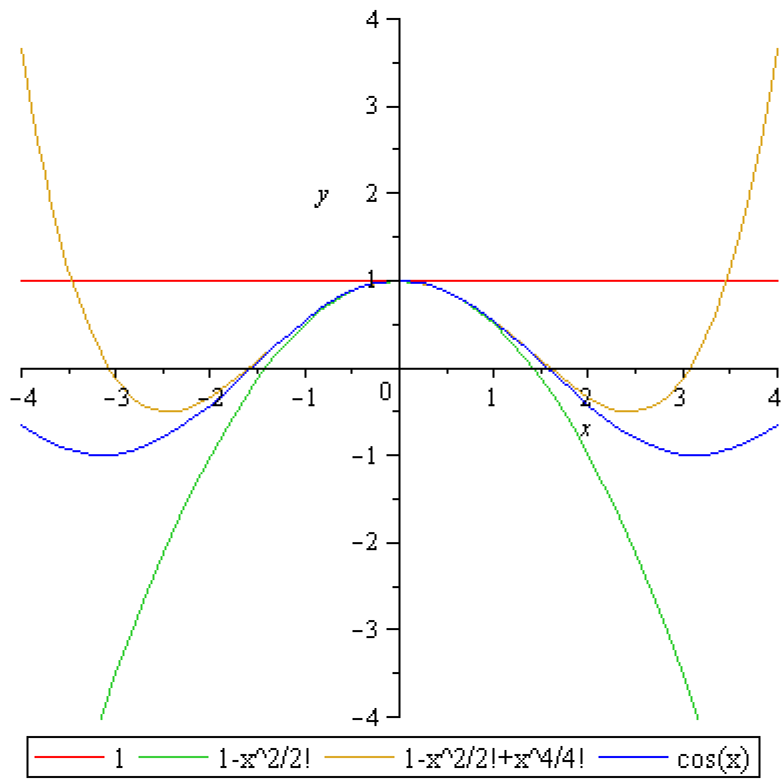


Figura 2.62 $f(x) = \cos x$ și aproximațiile acesteia

4) $f(x) = \ln(1+x)$

Definită și infinit diferențiabilă pe $(-1, +\infty)$.

$$f(x) = \ln(1+x) \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3} \qquad f'''(0) = 2!$$

$$\vdots$$

$$f^{(n-1)}(x) = (-1)^n \frac{(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} \qquad f^{(n-1)}(0) = (-1)^n (n-2)!$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad f^{(n)}(\theta x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+\theta x)^n}$$

Aplicăm formula Maclaurin

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n(x)$$

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}, \qquad 0 < \theta < 1$$

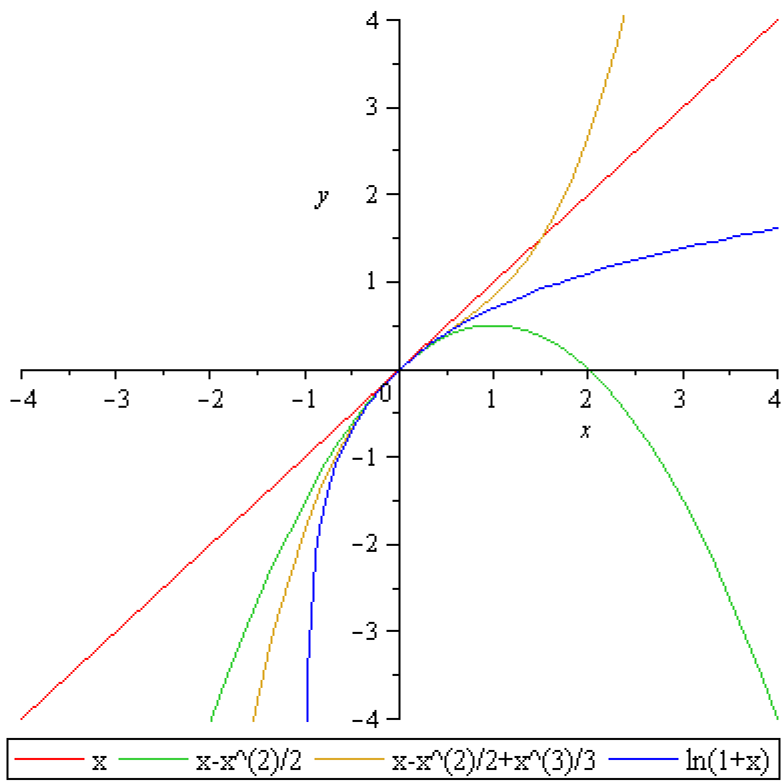


Figura 2.63 $f(x) = \ln(1+x)$

Investigarea funcțiilor pentru extreme Formula Taylor este utilă pentru a determina extremele unei funcții.

Teorema 1: Fie $f(x)$ o funcție care are derivată de ordinul n pe o vecinătate a punctului x_0. Fie $f^{(n)}(x)$ continuă în x_0 şi fie $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ şi $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Atunci:

(i) Dacă n este impar, funcția nu are extrem în x_0.

(ii) Dacă n este par şi $f^{(n)}(x_0) < 0$ atunci funcția are un maxim în x_0.

(iii) Dacă n este par şi $f^{(n)}(x_0) > 0$ atunci funcția are un minim în x_0.

Exemplu: Investigați funcțiile $y = x^4$ şi $y = x^3$ pentru extrem.

$x = 0$ este punct critic pentru aceste funcții.

$y = x^4 \quad y' = 4x^3 \quad y'' = 12x^2 \quad y''' = 24x \quad y^{(4)} = 24$

$f(0) = 0 \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = 0 \quad f^{(4)}(0) = 24$

$n = 4$ par şi $f^{(4)}(0) > 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ punct de minim pentru funcție.

$y = x^3 \quad y' = 3x^2 \quad y'' = 6x \quad y''' = 6$

$f(0) = 0 \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = 6$

$n = 3$ impar $\Rightarrow$ $x = 0$ nu este punct de extrem pentru funcție.

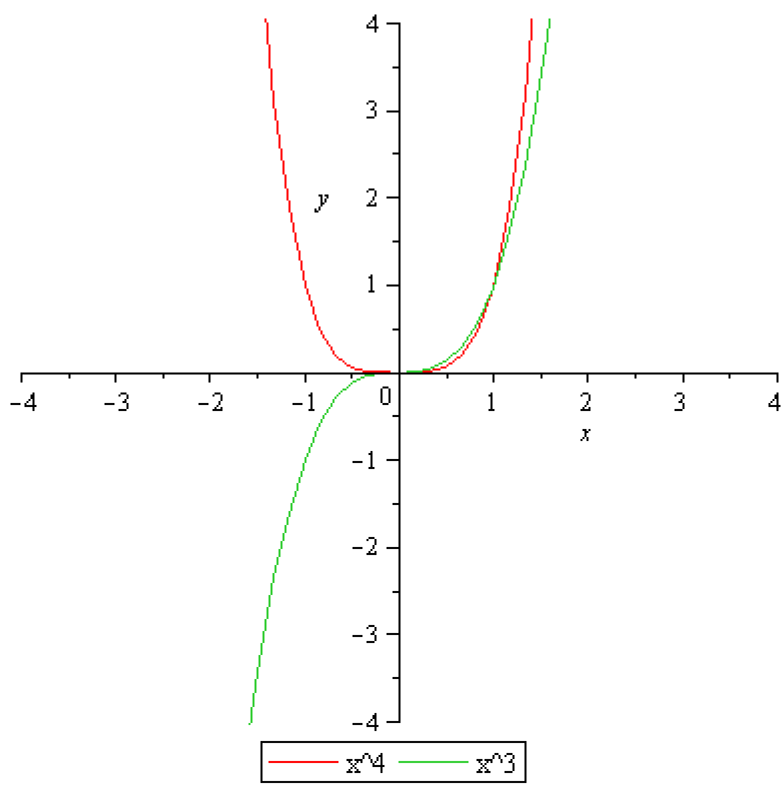


Figura 2.64

Teorema 2: Fie $f(x)$ o funcție care are derivată de ordinul *n* pe o vecinătate a punctului x_0 şi fie $f^{(n)}(x)$ continuă în x_0. Mai mult, fie $f''(x_0)=f'''(x_0)\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ şi $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Atunci punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ este punct de inflexiune pentru graficul $y=f(x)$ dacă *n* este impar.

Exemplu: $f(x)=x^3$

$y=x^3 \quad y'=3x^2 \quad y''=6x \quad y'''=6$

$n=3$ impar $\Rightarrow$ $x=0$ este punct de inflexiune pentru funcție.

2.21 Funcții vectoriale de argument scalar

Considerăm un punct *M* care se mişcă pe o traiectorie *L*. Acesta poate fi localizat, la fiecare moment de timp *t* prin indicarea vectorului său de poziție $\vec{r}$, vectorului său viteză $\vec{v}$, vectorului său accelerație $\vec{a}$, etc. Fiecare din aceşti vectori este o funcție vectorială de argument scalar *t*, adică

$$\vec{r}=\vec{r}(t), \quad \vec{v}=\vec{v}(t), \quad \vec{a}=\vec{a}(t)$$

Definiție: Spunem că $\vec{a}=\vec{a}(t)$ este o funcție vectorială de argument scalar *t* definită pe intervalul (α,β) dacă există o lege care asociază la fiecare $t\in(\alpha,\beta)$ un vector bine definit $\vec{a}$.

Fie vectorul $\vec{a}$ dezvoltat relativ la vectorii unitate $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ai unui sistem de coordonate cartezian:

$$\vec{a}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$$

Dacă $\vec{a}=\vec{a}(t)$ este o funcție vectorială de argument scalar *t*, atunci coordonatele sale *x*, *y* şi *z* sunt funcții scalare de argumentul *t*, adică

$$x=\varphi(t) \qquad y=\psi(t) \qquad z=\gamma(t), \qquad t\in(\alpha,\beta)$$

Reciproc, dacă coordonatele *x*, *y* şi *z* ale vectorului $\vec{a}$ sunt funcții scalare de argumentul *t*, atunci şi vectorul $\vec{a}$ este funcție vectorială de argumentul scalar *t*.

$$\vec{a}=\varphi(t)\vec{i}+\psi(t)\vec{j}+\gamma(t)\vec{k}$$

Observație: Funcția vectorială $\vec{a}(t)$ este complet determinată de funcțiile scalare $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ şi $z=\gamma(t)$ şi vice versa.

Definiție: Considerăm vectorul $\vec{a}(t)$ a cărui origine este punctul *O* din spațiu. Pentru diverse valori ale argumentului *t*, vectorul $\vec{a}(t)$ are vârful în diverse puncte care

formează o mulțime în spațiu. Această mulțime de puncte, corespunzătoare tuturor valorilor argumentului t din domeniul de definiție, se numeşte *hodograful* funcției vectoriale $\vec{a}(t)$. În general hodograful este o curbă.

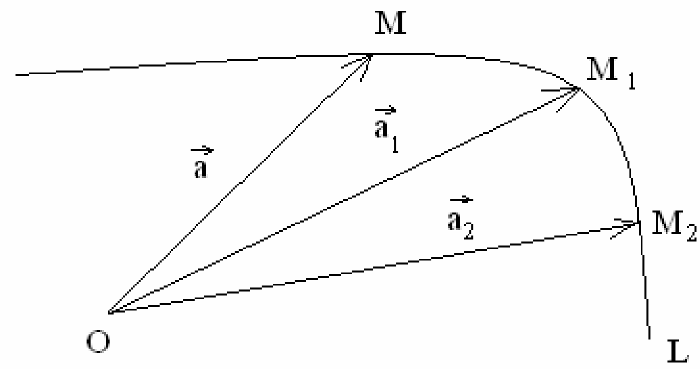


Figura 2.65

Observație: Hodograful vectorului de poziție $\vec{r}$ al unui punct mobil coincide cu traiectoria L a punctului.

Ecuația:

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in (\alpha, \beta)$$

sau

$$\vec{r} = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \gamma(t)\vec{k}, \quad t \in (\alpha, \beta)$$

se numeşte *ecuație vectorială* a curbei L.

Ecuațiile:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \qquad t \in (\alpha, \beta) \\ z = \gamma(t) \end{cases}$$

se numesc *ecuații parametrice* ale curbei L.

Exemplu: Ecuațiile: $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t\,, \\ z = ht \end{cases}$ $\quad t \in [0, 2\pi),\ \ R = ct\,,\ \ h = ct$

sunt ecuațiile parametrice care definesc o curbă elicoidală în spațiu.

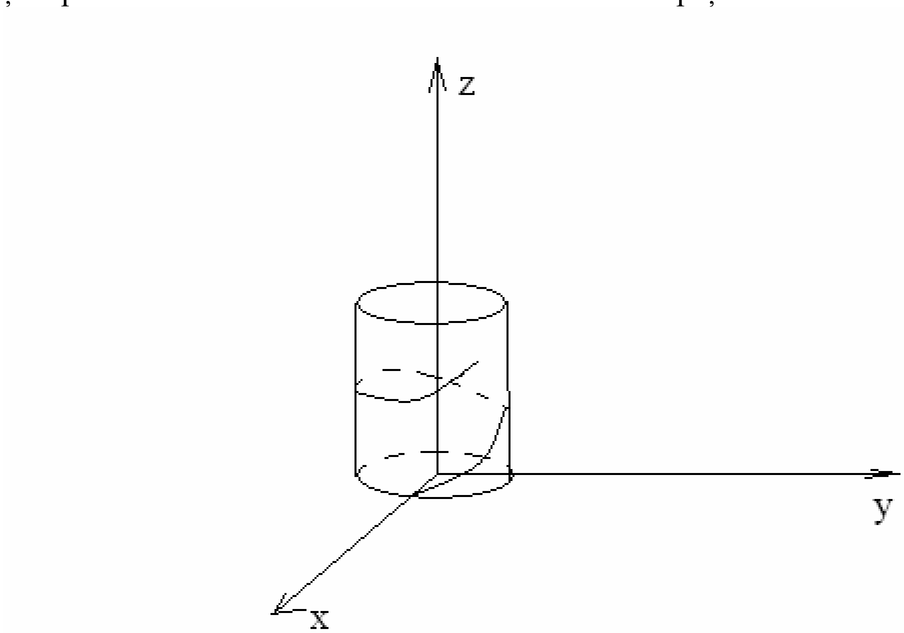


Figura 2.66

Limite şi continuitate pentru funcții vectoriale

Definiție: Fie funcția vectorială $\vec{a} = \vec{a}(t)$ definită pe o vecinătate a punctului $t = t_0$ cu o posibilă excepție în t_0. Vectorul $\vec{A}$ este limita funcției vectoriale $\vec{a}(t)$ pentru $t \to t_0$ dacă $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ astfel încât

$$\left|\vec{a}(t) - \vec{A}\right| < \varepsilon$$

pentru $\forall t \neq t_0$, $|t - t_0| < \delta$.

Notație: $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{a}(t) = \vec{A}$

Interpretare geometrică: Lungimea vectorului $\vec{a}(t) - \vec{A}$ tinde la zero când $t \to t_0$, astfel încât vectorul $\vec{a}(t)$ tinde să coincidă cu vectorul $\vec{A}$ pentru $t \to t_0$.

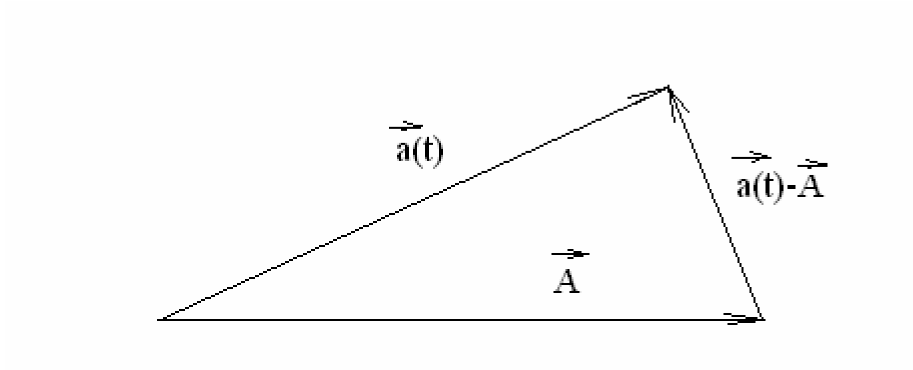


Figura 2.67

$$\lim_{t\to t_0}\vec{a}(t)=\vec{A} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to t_0}\left|\vec{a}(t)-\vec{A}\right|=0$$

Dacă

$$\vec{a}=\varphi(t)\vec{i}+\psi(t)\vec{j}+\gamma(t)\vec{k}$$
$$\vec{A}=a\,\vec{i}+b\,\vec{j}+c\,\vec{k}$$

atunci

$$\left|\vec{a}(t)-\vec{A}\right|=\sqrt{\left(\varphi(t)-a\right)^2+\left(\psi(t)-b\right)^2+\left(\gamma(t)-c\right)^2}$$

Dacă
$$\lim_{t\to t_0}\vec{a}(t)=\vec{A}$$

atunci
$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t)=a, \quad \lim_{t\to t_0}\psi(t)=b, \quad \lim_{t\to t_0}\gamma(t)=c$$

şi vice versa.

Definiţie: Fie $\vec{a}=\vec{a}(t)$ o funcţia vectorială definită pe (α,β) şi fie $t_0\in(\alpha,\beta)$. Funcţia vectorială $\vec{a}(t)$ este continuă în $t=t_0$ dacă

$$\lim_{t\to t_0}\vec{a}(t)=\vec{a}(t_0)$$

Diferențierea funcțiilor vectoriale

Fie $\vec{a}=\vec{a}(t)$ o funcția vectorială definită pe (α,β) şi fie curba *L* hodograful funcției $\vec{a}(t)$. La punctul $t\in(\alpha,\beta)$ îi corespunde punctul *M* de pe curba *L*.

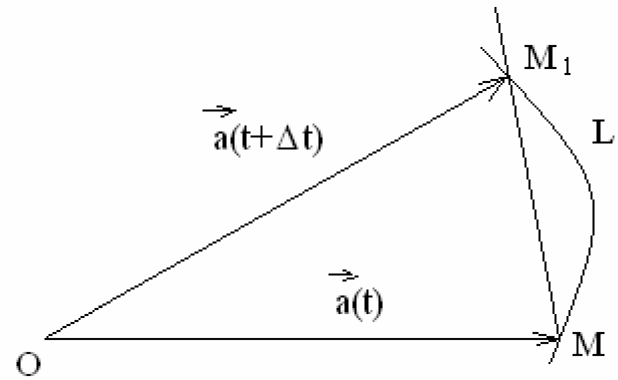


Figura 2.68

Considerăm o creştere Δt a argumentului *t* astfel încât $t+\Delta t\in(\alpha,\beta)$. Vectorul asociat noului argument $\vec{a}(t+\Delta t)$ are în corespondență punctul M_1 de pe curba *L*.
Creşterea funcției vectoriale $\vec{a}(t)$ corespunzătoare creşterii argumentului Δt, este

$$\Delta\vec{a}=\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)$$

Raportul

$$\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}=\frac{\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)}{\Delta t},\quad \Delta t\neq 0$$

este un vector coliniar cu $\Delta\vec{a}$.

Definiție: Limita raportului $\dfrac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}$ pentru $\Delta t\to 0$, dacă există, se numeşte derivata funcției vectoriale $\vec{a}(t)$ în raport cu argumentul scalar *t*, în punctul *t*. Adică

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)}{\Delta t}$$

Problema 1: Care este orientarea vectorului $\frac{d\vec{a}}{dt}$?

Atunci când $\Delta t \to 0$, punctul M_1 se deplasează pe hodograful *L* spre *M*, astfel încât secanta MM_1 va tinde la tangenta la curba *L* în punctul *M*. În consecință, derivata $\frac{d\vec{a}}{dt}$ este un vector tangent la hodograful lui $\vec{a}(t)$ în punctul *M*.

Problema 2: Cum calculăm derivata unei funcții vectoriale?

Considerăm

$$\vec{a} = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \gamma(t)\vec{k}$$

Atunci

$$\Delta\vec{a}(t) = \vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t) = \Delta\varphi(t)\vec{i} + \Delta\psi(t)\vec{j} + \Delta\gamma(t)\vec{k}$$

Şi împărțind cu $\Delta t \neq 0$

$$\frac{\Delta\vec{a}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi(t)}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta\psi(t)}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta\gamma(t)}{\Delta t}\vec{k}$$

Dacă funcțiile $\varphi(t)$, $\psi(t)$ şi $\gamma(t)$ sunt derivabile în *t*, atunci fiecare termen din relația de mai sus are limită pentru $\Delta t \to 0$. În această situație şi raportul din stânga are limită, adică există $\frac{d\vec{a}(t)}{dt}$. Mai mult,

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{i} + \frac{d\psi}{dt}\vec{j} + \frac{d\gamma}{dt}\vec{k}$$

Concluzie: Pentru a calcula derivata funcției vectoriale $\vec{a}(t)$ trebuie să calculăm derivatele coordonatelor funcției $\vec{a}(t)$.

Aplicație: Dacă $\vec{r} = \vec{r}(t)$ este vectorul de poziție al unui punct material, atunci viteza punctului material la momentul *t*, este determinată de derivata lui $\vec{r}(t)$, adică

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$$

Exemplu: Calculați derivata funcției vectoriale:

$$\vec{a}(t) = R\cos t\ \vec{i} + R\sin t\ \vec{j} + ht\ \vec{k}\ , \qquad R, h = ct$$

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = -R\sin t\ \vec{i} + R\cos t\ \vec{j} + h\ \vec{k}$$

Reguli de diferențiere:

1) Dacă $\vec{c}$ este un vector constant, atunci $\dfrac{d\vec{c}}{dt} = 0$.
2) Dacă funcțiile $\vec{a}(t)$ şi $\vec{b}(t)$ au derivate în *t*, atunci

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}(t) \pm \vec{b}(t)\right) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \pm \frac{d\vec{b}(t)}{dt}$$

3) Dacă α este o constantă şi $\vec{a}(t)$ are derivată în *t*, atunci

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha\ \vec{a}(t)\right) = \alpha \frac{d\vec{a}(t)}{dt}$$

4) Derivata produsului scalar este:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}(t), \vec{b}(t)\right) = \left(\frac{d\vec{a}}{dt}, \vec{b}\right) + \left(\vec{a}, \frac{d\vec{b}}{dt}\right)$$

Observație: Dacă $\vec{e}(t)$ este vector unitar, adică $\left|\vec{e}(t)\right| = 1$, atunci derivata sa $\dfrac{d\vec{e}}{dt}$ este perpendiculară pe $\vec{e}$.
Într-adevăr, dacă $\vec{e}$ este vector unitar, atunci $(\vec{e}, \vec{e}) = 1$ şi diferențiind acest produs scalar obținem:

$$\left(\frac{d\vec{e}}{dt}, \vec{e}\right) + \left(\vec{e}, \frac{d\vec{e}}{dt}\right) = 0$$

$$2\left(\frac{d\vec{e}}{dt},\vec{e}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{e}}{dt}\perp\vec{e}$$

5) Derivata produsului vectorial este:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{a}(t)\times\vec{b}(t)\right]=\frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}+\vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$$

Cap III Calcul integral

3.1 Integrala nedefinită

Definiție: O funcție $F(x)$ este o *primitivă* a funcției $f(x)$ pe intervalul (a,b), dacă $F(x)$ este diferențiabilă în oricare punct din (a,b) şi $F'(x)=f(x)$ sau echivalent $dF(x)=f(x)dx$, $\forall x\in(a,b)$.

Exemple:

1) $F(x)=\arcsin x$ este o primitivă a funcției

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pe intervalul } (-1,+1).$$

Intr-adevăr,

$$F'(x)=(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $F(x)=\dfrac{a^x}{\ln a}$, $a>0$, $a\neq 1$ este o primitivă a funcției

$$f(x)=a^x \text{ pe intervalul } (-\infty,+\infty).$$

Intr-adevăr,

$$F'(x)=\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)'=\frac{a^x\ln a}{\ln a}=a^x$$

Dacă $F(x)$ este o *primitivă* a funcției $f(x)$ pe intervalul (a,b), atunci şi $\Phi(x)=F(x)+C$ este o *primitivă* a funcției $f(x)$ pe intervalul (a,b).

Definiție: Mulțimea tuturor primitivelor unei funcții $f(x)$ pe (a,b) se numeşte *integrala nedefinită* a funcției $f(x)$ pe intervalul (a,b) şi se notează

$$\int \underbrace{f(x)dx}_{element\ de\ \text{integrare}}$$

$x=$variabilă de integrare

Dacă $F(x)$ este una din primitivele funcției $f(x)$ pe intervalul (a,b), atunci

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C = \text{ constantă}$$

Observație: Dacă $f(x)$ este o funcție continuă pe intervalul (a,b), atunci funcția admite primitive pe intervalul (a,b) şi în consecință are integrală nedefinită pe (a,b).

Proprietățile integralei nedefinite:

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

Intr-adevăr, $d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$

2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

Intr-adevăr, relația are loc dacă avem în vedere definiția diferențialei.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$

Intr-adevăr, $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$

4. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx, \quad A = \text{ct.} \quad A \neq 0$

5. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

6. $\int\left(\sum_{k=1}^{n} A_k f_k(x)\right)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \int f_k(x)dx, \quad A_k = \text{ct.}$

Integralele nedefinite ale funcțiilor elementare

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$, $x > 0$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $x \neq 0$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$

$\int e^x dx = e^x + C$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$, $x \neq n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$, $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, $x \in (-1, +1)$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$, $x \in (-a, +a)$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$, semnul **(-)** cere $|x| > |a|$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, $a \neq 0$

Observație: Operațiile de diferențiere şi integrare sunt diferite. Subliniem că diferențiind funcții elementare totdeauna obținem funcții elementare, în timp ce integrand funcții elementare nu vom putea reprezenta totdeauna integralele nedefinite ale acestora în mulțimea funcțiilor elementare. De exemplu, integralele următoare nu pot fi reprezentate în mulțimea funcțiilor elementare deşi datorită continuității funcțiilor de sub integrală, aceste integrale nedefinite există.

$$\int e^{-x^2}dx \qquad \int \sin x^2 dx \qquad \int \cos x^2 dx$$

$$\int \frac{sinx}{x}dx\,,\ \ x \neq 0 \qquad \int \frac{cosx}{x}dx\,,\ \ x \neq 0 \qquad \int \frac{dx}{\ln x}\,,\ \ x > 0\,,\ \ x \neq 1$$

a) Integrale care se reduc la integrarea funcțiilor elementare

Exemple:

1) $$\int\left(\sqrt{x^3}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)^2 dx = \int\left(x^3-2+\frac{1}{x^3}\right)dx = \frac{x^4}{4}-2x+\frac{x^{-2}}{-2}+C$$

$$= \frac{x^4}{4}-2x-\frac{1}{2x^2}+C$$

2) $$\int\frac{(1+x)^2}{x^3+x}dx = \int\frac{1+2x+x^2}{x\left(1+x^2\right)}dx = \int\frac{\left(1+x^2\right)+2x}{x\left(1+x^2\right)}dx =$$

$$= \int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{1+x^2}\right)dx = \int\frac{dx}{x}+2\int\frac{1}{1+x^2}dx = \ln|x|+2arctg\ x+C$$

3) $$\int\frac{2\cdot 3^x+3\cdot 2^x}{5^x}dx = \int\left(2\left(\frac{3}{5}\right)^x+3\left(\frac{2}{5}\right)^x\right)dx = 2\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}+3\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}+C$$

b) Metoda substituției

Calculăm integrala nedefinită $\int f(x)dx$ a unei funcții continue $f(x)$. Presupunem că există o funcție $x=\varphi(t)$ cu derivată continuă $\varphi'(t)$ şi funcție inversă $t=\psi(x)$. Atunci putem să scriem:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Desigur, substituind în rezultatul acestei integrale în variabila *t*, pe *t* cu $t=\psi(x)$, obținem rezultatul în variabila inițială x.

Exemplu:

$$\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$$

Considerăm: $x=t^2-1$

$$dx=2t\ dt$$

$$t=\sqrt{x+1}$$

Atunci,

$$\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}=\int\frac{2tdt}{(t^2+1)t}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2arctg\ t+C$$

Cu substituția $t=\sqrt{x+1}$, obținem:

$$\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}=2arctg\ \sqrt{x+1}+C$$

Observație: Presupunem că în integrala $\int f(x)dx$ elementul de integrare $f(x)dx$ admite o reprezentare de forma:

$$f(x)dx = g[\psi(x)]\psi'(x)dx$$

$$f(x)dx = g[\psi(x)]d[\psi(x)]$$

Dacă $g(t)$ este uşor integrabilă, atunci

$$\int g(t)dt = F(t) + C = F(\psi(x)) + C$$

Exemple:

1) $\int \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} dx$

Considerăm $t = 2^x + 2^{-x}$, $t > 0$

$$dt = \left(2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2\right) dx$$

$$\int \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} dx = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\ln 2} \ln t + C = \frac{\ln\left(2^x + 2^{-x}\right)}{\ln 2} + C$$

2) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$

Considerăm $t = \sqrt{e^x + 1}$ $\qquad$ $e^x = t^2 - 1$

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{e^x + 1}} e^x dx$$

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx = \int e^x \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx = \int \left(t^2 - 1\right) 2dt = 2\int \left(t^2 - 1\right) dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + C = \frac{2}{3}\left(e^x + 1\right)^{3/2} - 2\sqrt{e^x + 1} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{e^x+1}\left(e^x+1-3\right)+C = \frac{2}{3}\left(e^x-2\right)\sqrt{e^x+1}+C$$

c) Integrarea prin părți

Fie funcțiile $u(x)$ şi $v(x)$ cu derivate $u'(x)$ şi $v'(x)$ continue. Atunci are loc:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx + C$$

sau

$$\int u\ dv = u \cdot v - \int v\ du + C$$

deoarece $v'(x)dx = dv$ şi $u'(x)dx = du$.

Exemple:

1) $\int (2-3x)\cos x\ dx$

$$u = 2-3x \qquad dv = \cos x\ dx$$

$$du = -3\ dx \qquad v = \sin x$$

$$\int (2-3x)\cos x\ dx = (2-3x)\sin x + \int 3\sin x\ dx = (2-3x)\sin x - 3\cos x + C$$

2) $\int \ln x\ dx$

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = x$$

$$\int \ln x\ dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

3) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx\,,\quad |x| < |a|$

Considerăm $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ $\qquad dv = dx$

$$du = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx \qquad v = x$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2 - \left(a^2 - x^2\right)}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx + C$$

$$2\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

4) $\int x^2 2^x\,dx$

$$u = x^2 \qquad dv = 2^x\,dx$$

$$du = 2x\ dx \qquad v = \frac{2^x}{\ln 2}$$

$$\int x^2 2^x\,dx = \frac{x^2 \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\int x2^x\,dx$$

$$u = x \qquad\qquad dv = 2^x dx$$

$$du = dx \qquad\qquad v = \frac{2^x}{\ln 2}$$

$$\int x^2 2^x dx = \frac{x^2 \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\left(\frac{x \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x dx \right)$$

$$= \frac{x^2 \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\left(\frac{x \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} \right) + C$$

5) $\int e^{\alpha x} \cos \beta x \; dx$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$

Considerăm $\qquad u = e^{\alpha x} \qquad\qquad dv = \cos \beta x \; dx$

$$du = \alpha e^{\alpha x} dx \qquad\qquad v = \frac{\sin \beta x}{\beta}$$

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x \; dx = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$$

$$u = e^{\alpha x} \qquad\qquad dv = \sin \beta x \; dx$$

$$du = \alpha e^{\alpha x} dx \qquad\qquad v = -\frac{\cos \beta x}{\beta}$$

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x \; dx = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta}\left(-\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx \right)$$

$$\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) \int e^{\alpha x} \cos \beta x \; dx = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x \; dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x) + C$$

3.2 Integrarea funcțiilor raționale

Cea mai simplă funcție rațională este un polinom de gradul n :

$$Q_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

unde $a_0 \neq 0$ şi $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Un număr b este rădăcină pentru polinom $\Leftrightarrow \quad Q_n(b) = 0$.

Observație: Orice polinom real $Q_n(x)$ poate fi descompus în factori în mod unic. Factorii sunt polinoame liniare $x - b$ şi polinoame pătratice $x^2 + px + q$, în care p, q sunt coeficienți reali şi fiecare polinom pătratic este ireductibil la polinoame liniare, deoarece nu are rădăcini reale.

$$Q_n(x) = a_0 (x-a)^{\alpha} (x-b)^{\beta} \cdots (x-l)^{\lambda} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{\mu_1} \cdots \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{\mu_s}$$

unde exponenții $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu_1, \ldots, \mu_s$ sunt numere naturale şi are loc:

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda + 2(\mu_1 + \ldots + \mu_s) = n$$

Dacă $\alpha = 1$, rădăcina a se numeşte *simplă.*
Dacă $\alpha \geq 2$, rădăcina a se numeşte *multiplă.*

In general, o funcție rațională reală $f(x)$, este raportul a două polinoame reale care nu au nici un factor comun.

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

O funcție rațională se numeşte *proprie* dacă numărătorul $P_m(x)$ are gradul mai mic decât numitorul $Q_n(x)$, adică $m < n$.

Dacă $m \geq n$, în urma unei împărțiri, fracția $f(x)$ poate fi reprezentată astfel:

$$f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=R_{m-n}(x)+\frac{\widetilde{P}(x)}{Q_n(x)}$$

unde $R_{m-n}(x)$ şi $\widetilde{P}(x)$ sunt polinoame reale, iar $\dfrac{\widetilde{P}(x)}{Q_n(x)}$ este funcție rațională proprie.

Funcțiile raționale simple sunt funcțiile raționale proprii de forma:

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad \text{şi} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$

unde $A, M, N, a, p, q \in \mathbb{R}$, $k \geq 2$ număr natural. Polinomul pătratic x^2+px+q nu are rădăcini reale, $p^2-4q<0$.

Teoremă: Fie funcția rațională reală proprie $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ şi fie

$$Q_n(x)=a_0(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\cdots(x-l)^{\lambda}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\mu_1}\cdots\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\mu_s} .$$

Atunci, $f(x)$ se descompune în mod unic într-o sumă de funcții raționale simple:

$$\begin{aligned}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=&\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\\ &+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\\ &\qquad\ldots\\ &+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_sx+q_s}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^2}+\cdots+\frac{M_{\mu_s}x+N_{\mu_s}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\mu_s}}\end{aligned}$$

unde $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, B_1, B_2, \ldots, B_\beta, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_{\mu_s}, N_{\mu_s} \in \mathbb{R}$ şi nu sunt toate nule.

Pentru a determina coeficienții de la numărătorii fracțiilor raționale simple, înmulțim relația precedentă cu $Q_n(x)$ şi aplicăm metoda identificării coeficienților puterilor egale a lui x în relația astfel obținută. Astfel, se obține un sistem liniar în necunoscutele $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, B_1, B_2, \ldots, B_\beta, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_{\mu_s}, N_{\mu_s}$.

Exemple:

1. Descompuneți fracția rațională

$$f(x)=\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}$$

în fracții raționale simple.

$$x^3-3x^2+2x=x\left(x^2-3x+2\right)=x(x-1)(x-2)$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}$$

$$3x^2-6x+2=A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)$$

$$3x^2-6x+2=A\left(x^2-3x+2\right)+B\left(x^2-2x\right)+C\left(x^2-x\right)$$

$$\begin{aligned}
x^2&:\quad 3=A+B+C\\
x^1&:\quad -6=-3A-2B-C\\
x^0&:\quad 2=2A
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad A=B=C=1$$

$$f(x)=\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$$

2. Descompuneți fracția rațională

$$f(x)=\frac{x^3+3x+1}{x^5+3x^4+3x^3+x^2}$$

în fracții raționale simple.

$$x^5+3x^4+3x^3+x^2=x^2\left(x^3+3x^2+3x+1\right)=x^2(x+1)^3$$

$$\frac{x^3+3x+1}{x^5+3x^4+3x^3+x^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_3}{(x+1)^3}$$

$$x^3+3x+1=A_1x(x+1)^3+A_2(x+1)^3+B_1x^2(x+1)^2+B_2x^2(x+1)+B_3x^2$$

$$x^3+3x+1=A_1\left(x^4+3x^3+3x^2+x\right)+A_2\left(x^3+3x^2+3x+1\right)+B_1\left(x^4+2x^3+x^2\right)+B_2\left(x^3+x^2\right)+B_3x^2$$

$x^4:\quad 0=A_1+B_1$

$x^3:\quad 1=3A_1+A_2+2B_1+B_2$

$x^2:\quad 0=3A_1+3A_2+B_1+B_2+B_3$

$x^1:\quad 3=A_1+3A_2$

$x^0:\quad 1=A_2$

$\Rightarrow\quad A_1=0\quad A_2=1\quad B_1=0\qquad B_2=0\qquad B_3=-3$

$$f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{(x+1)^3}$$

3. Descompuneți fracția rațională

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

în fracții raționale simple.

$$\frac{x^3+x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$x^3+x^2+1=\left(M_1x+N_1\right)\left(x^2+1\right)+M_2x+N_2$$

$$x^3+x^2+1=M_1x^3+M_1x+N_1x^2+N_1+M_2x+N_2$$

$x^3:\quad 1=M_1$

$x^2:\quad 1=N_1$

$x^1:\quad 0=M_1+M_2$

$x^0:\quad 1=N_1+N_2$

$\Rightarrow\quad \mathrm{M}_1=1\qquad N_1=1\qquad M_2=-1\qquad N_2=0$

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}-\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Integrarea funcțiilor raționale simple

1. $\int \frac{A}{x-a} dx$

$$t = x - a$$
$$dt = dx$$

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A\int \frac{dt}{t} = A\ln|t| = A\ln|x-a| + C$$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx$

$$t = x - a$$
$$dt = dx$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A\int t^{-k} dt = A\frac{t^{-k+1}}{-k+1} = A\frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$$

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx$

$$x^2 + px + q = \left[x^2 + 2x\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right] + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

Notație: $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$

Substituție: $t = x + \frac{p}{2}$

$$dt = dx$$
$$x^2 + px + q = t^2 + a^2$$
$$x = t - \frac{p}{2}$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt = M\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2}$$

$$\varphi = t^2+a^2$$
$$d\varphi = 2tdt$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d\varphi}{\varphi} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

Exemplu:

$$\int \frac{2-x}{x^2+4x+6}dx$$

$$x^2+4x+6 = x^2+4x+4+2 = (x+2)^2+2$$

$$t = x+2$$
$$dt = dx$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+4x+6}dx = \int \frac{2-(t-2)}{t^2+2}dt = 4\int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+2}dt$$

$$= 4\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + C = 2\sqrt{2}arctg\frac{x+2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4x+6\right) + C$$

4. $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx$, $\quad k \geq 2$

Substituție: $t = x+\frac{p}{2}$

$$dt = dx$$
$$x^2+px+q = t^2+a^2$$
$$x = t-\frac{p}{2}$$
$$a \overset{not}{=} \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$$

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt = M\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= t^2 + a^2 \\ d\varphi &= 2tdt \end{aligned}$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d\varphi}{\varphi^k} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{M}{2(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)I_k$$

Am notat cu I_k integrala:

$$I_k = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left(t^2+a^2\right)-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{t\cdot 2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{a^2}I_{k-1} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{t\cdot 2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$$

$$u = t \qquad dv = \frac{2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$$

$$du = dt \qquad v = \frac{\left(t^2+a^2\right)^{-k+1}}{-k+1}$$

$$I_k = \frac{1}{a^2}I_{k-1} - \frac{1}{2a^2}\left(\frac{t}{(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{1}{k-1}I_{k-1}\right)$$

$$I_k = \frac{t}{2a^2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)}I_{k-1}$$ relație de recurență

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{t}{a} + C$$

$$I_2 = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^2} = \frac{t}{2a^2\left(t^2+a^2\right)} + \frac{1}{2a^2}I_1 = \frac{t}{2a^2\left(t^2+a^2\right)} + \frac{1}{2a^3}arctg\frac{t}{a} + C$$

Exemplu:

$$\int \frac{x+1}{\left(x^2-4x+5\right)^2}dx$$

$$x^2-4x+5=x^2-4x+4+1=\left(x-2\right)^2+1$$

$$t=x-2$$
$$dt=dx$$

$$\int \frac{t+3}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\frac{1}{2}\int \frac{2t}{\left(t^2+1\right)^2}+3\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+1}+3I_2$$

$$I_2=\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}=\int \frac{t^2+1-t^2}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\int \frac{dt}{t^2+1}-\frac{1}{2}\int t\cdot \frac{2tdt}{\left(t^2+1\right)^2}$$

$$u=t \qquad dv=\frac{2tdt}{\left(t^2+1\right)^2}$$

$$du=dt \qquad v=-\frac{1}{t^2+1}$$

$$I_2=arctgt-\frac{1}{2}\left(-\frac{t}{t^2+1}+\int \frac{dt}{t^2+1}\right)=\frac{1}{2}arctgt+\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}+C$$

$$\int \frac{t+3}{\left(t^2+1\right)^2}dt=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+1}+3\left(\frac{1}{2}arctgt+\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}\right)+C$$

Se revine la variabila x cu ajutorul substituției.

Observație: Integrala nedefinită a unei funcții raționale totdeauna există pe intervalele în care numitorul $Q_n\left(x\right)$ aste nenul, și se exprimă cu ajutorul unui număr finit de funcții elementare, anume o sumă algebrică care are ca termeni numai polinoame, funcții raționale proprii, funcții logaritmice şi arctangente.

Exemple:

1. $\int \frac{x^3}{(x-1)(x^2-4)}dx$

2. $\int \frac{x^2+1}{x^4-x^3}dx$

3. $\int \frac{x^3-x}{(x^2+1)^2}dx$

3.3 Intergarea funcțiilor iraționale

Considerăm funcții de mai multe variabile $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Astfel, fie $R(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ o funcție reprezentată astfel:

$$R(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \frac{P_m(u_1, u_2, \ldots, u_k)}{Q_n(u_1, u_2, \ldots, u_k)}$$

unde $P_m(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ şi $Q_n(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ sunt polinoame de gradul *m* şi respectiv *n* în $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Acestă funcție este una rațională în $u_1, u_2, \ldots, u_k$. În caz contrar, funcția este irațională.

Exemple:

1) $P_2(u_1, u_2) = A_{00} + A_{10}u_1 + A_{01}u_2 + A_{20}u_1^2 + A_{11}u_1u_2 + A_{02}u_2^2$

este polinom de gradul doi în variabilele u_1, u_2 în care coeficienții sunt numere reale şi $A_{20}^2 + A_{11}^2 + A_{02}^2 \neq 0$.

2) $$f(x,y)=\frac{x^2+2y^3+xy}{x+x^3y^2+1}$$

este funcție rațională în variabilele *x,y* deoarece este raport de două polinoame $P_3(x,y)=x^2+2y^3+xy$ şi $Q_5(x,y)=x+x^3y^2+1$.

3) $$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+xy+3}}{x+y}$$

este funcție irațională.

Presupunem că variabilele $u_1,u_2,\ldots,u_k$ sunt funcții de o variabilă *x*, adică

$$u_1=f_1(x),\ u_2=f_2(x),\ \ldots\ u_k=f_k(x)$$

Atunci funcția $R\left[f_1(x),f_2(x),\ldots,f_k(x)\right]$ este o funcție rațională în funcțiile $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_k(x)$.

Exemple:

1) $$f(x)=\frac{x^2+\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+3\sqrt{x^2+x+1}}$$

este funcție rațională în *x* şi $\sqrt{x^2+x+1}$, adică $f(x)=R\left(x,\sqrt{x^2+x+1}\right)$.

2) $$f(x)=\frac{\ln x+\sqrt{x^2+1}}{2+\sin x}$$

este irațională în *x* şi $\sqrt{x^2+1}$ dar este funcție rațională în $\ln x$, $\sqrt{x^2+1}$ şi $\sin x$, adică $f(x)=R\left(\ln x,\sqrt{x^2+1},\sin x\right)$.

Observație: Nu toate integralele funcțiilor iraționale admit reprezentări în mulțimea funcțiilor elementare. De exemplu, integralele

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}} \quad \text{şi} \quad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}} \qquad k \in (0,1)$$

numite integrale eliptice nu pot fi exprimate în mulțimea funcțiilor elementare.

Prin substituții potrivite anumite integrale ale funcțiilor iraționale pot fi transformate în integrarea funcțiilor raționale. În cele ce urmează, ne ocupăm de astfel de integrale.

1) $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, unde $m \geq 2$ este număr natural şi coeficienții respectă $ad-bc \neq 0$. Substituția recomandată este

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

Exemple:

$$\int \sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}} \frac{dx}{(2x+3)^2} \qquad t = \sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}$$

$$t^4 = \frac{2x-3}{2x+3} \qquad t^4(2x+3) = 2x-3 \qquad 2x\left(1-t^4\right) = 3\left(1+t^4\right)$$

$$x = \frac{3}{2}\frac{1+t^4}{1-t^4} \qquad dx = \frac{3}{2}\frac{4t^3\left(1-t^4\right)+4t^3\left(1+t^4\right)}{\left(1-t^4\right)^2}dt \qquad dx = \frac{12t^3}{\left(1-t^4\right)^2}dt$$

$$\int \sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}} \frac{dx}{(2x+3)^2} = \int t \frac{1}{\left(2\frac{3}{2}\frac{1+t^4}{1-t^4}+3\right)^2} \frac{12t^3}{\left(1-t^4\right)^2}dt$$

$$= \int t \frac{1}{3^2\left(1+t^4+1-t^4\right)^2} 12t^3dt = \frac{1}{3}\int t^4dt = \frac{1}{3}\frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{15}\left(\sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}\right)^5 + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)} \qquad t=\sqrt[12]{x}$$

$$t^{12}=x \qquad 12t^{11}dt=dx \qquad \sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{t^{12}}=t^3 \qquad \sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{t^{12}}=t^4 \qquad \sqrt{x}=\sqrt{t^{12}}=t^6$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)}=\int \frac{12t^{11}dt}{t^3\left(t^4+t^6\right)}=12\int \frac{t^4}{1+t^2}dt=12\int\left(t^2-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$=12\left(\frac{t^3}{3}-arctg\ t\right)+C=12\left(\frac{\sqrt[12]{x^3}}{3}-arctg\sqrt[12]{x}\right)+C$$

2) $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

i) Dacă $a>0$ substituția recomandată este $t=\sqrt{ax^2+bx+c}\pm\sqrt{a}x$

In cazul

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x \quad \Rightarrow \quad \left(t-\sqrt{a}x\right)^2=ax^2+bx+c$$

$$t^2-2t\sqrt{a}x+ax^2=ax^2+bx+c$$

$$t^2-2t\sqrt{a}x=bx+c$$

$$x=\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}$$

$$dx=\frac{2t\left(2t\sqrt{a}+b\right)-\left(t^2-c\right)2\sqrt{a}}{\left(2t\sqrt{a}+b\right)^2}dt \qquad dx=\frac{2t^2\sqrt{a}+2tb+2c\sqrt{a}}{\left(2t\sqrt{a}+b\right)^2}dt$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x=t-\sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}=\frac{2t^2\sqrt{a}-\sqrt{a}t^2+c\sqrt{a}}{2t\sqrt{a}+b}=\frac{t^2\sqrt{a}+c\sqrt{a}}{2t\sqrt{a}+b}$$

$$\int R\left(\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b},\frac{t^2\sqrt{a}+c\sqrt{a}}{2t\sqrt{a}+b}\right)\frac{2t^2\sqrt{a}+2tb+2c\sqrt{a}}{\left(2t\sqrt{a}+b\right)^2}dt=\int R_1\left(t\right)dt=F\left(t\right)+C$$

Exemple:

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+\alpha^2}\right)+C$$

$$t=\sqrt{x^2+\alpha^2}+x \qquad t-x=\sqrt{x^2+\alpha^2} \qquad \left(t-x\right)^2=x^2+\alpha^2$$

$$t^2-2tx=\alpha^2$$

$$x=\frac{t^2-\alpha^2}{2t}$$

$$dx=\frac{2t2t-\left(t^2-\alpha^2\right)2}{4t^2}dt=\frac{2t^2+2\alpha^2}{4t^2}dt=\frac{t^2+\alpha^2}{2t^2}dt$$

$$\sqrt{x^2+\alpha^2}=t-\frac{t^2-\alpha^2}{2t}=\frac{t^2+\alpha^2}{2t}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}dx=\int\frac{1}{\frac{t^2+\alpha^2}{2t}}\frac{t^2+\alpha^2}{2t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C=\ln\left(x+\sqrt{x^2+\alpha^2}\right)+C$$

Temă: $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2-\alpha^2}\right|+C$

ii) Dacă ax^2+bx+c are două rădăcimi reale distincte x_1, x_2, atunci substituția recomandată este

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\left(x-x_1\right)t$$

sau $$\sqrt{ax^2+bx+c}=\left(x-x_2\right)t$$

In cazul

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-x_1)t$$

$$a(x-x_1)(x-x_2)=(x-x_1)^2t^2 \qquad a(x-x_2)=(x-x_1)t^2$$

$$x=\frac{x_1t^2-ax_2}{t^2-a}$$

$$dx=\frac{2tx_1(t^2-a)-(x_1t^2-ax_2)2t}{(t^2-a)^2}dt=\frac{2ta(x_2-x_1)}{(t^2-a)^2}dt$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\left(\frac{x_1t^2-ax_2}{t^2-a}-x_1\right)t=\frac{x_1t^2-ax_2-t^2x_1+ax_1}{t^2-a}t=\frac{a(x_1-x_2)}{t^2-a}$$

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(\frac{x_1t^2-ax_2}{t^2-a},\frac{a(x_1-x_2)}{t^2-a}\right)\frac{2ta(x_2-x_1)}{(t^2-a)^2}dt=\int R_1(t)dt$$

3.4 Integrarea funcțiilor trigonometrice

1)

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

Substituția recomandată este: $t = tg\frac{x}{2},\quad x \in (-\pi, \pi)$ și integrala dată se reduce la integrarea unei funcții raționale.

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2arctg\ t \qquad dx = 2\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)\,dt$$

Exemplu:

$$\int \frac{dx}{\sin x} \qquad t = tg\frac{x}{2} \qquad x = 2arctg\ t \qquad dx = 2\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

Listăm trei tipuri de integrale ce pot fi rezolvate cu substituții mai simple.

a)

$$\int R(\sin x)\cos x\ dx$$

$$t = \sin x$$
$$dt = \cos x\ dx$$

$$\int R(\sin x)\cos x dx = \int R(t)\,dt$$

Exemplu:

$$\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}dx = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{\sin x}{2}\right) + C$$

b)

$$\int R(\cos x)\sin x dx$$

$$t = \cos x$$
$$dt = -\sin x\ dx$$

$$\int R(\cos x)\sin x dx = -\int R(t)\,dt$$

Exemplu:

$$\int \frac{\sin x}{2+\cos x}dx = -\int \frac{dt}{2+t} = -\ln|2+t| + C = -\ln(2+\cos x) + C$$

c)

$\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ unde funcția de sub integrală implică numai puteri pare în *sin*x şi *cos*x.

$$t = tgx$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$x = arctg\ t \qquad dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx = \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2},\frac{1}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}dt = \int R_1(t)\,dt$$

Exemplu:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x + 2} \qquad t = tgx$$

$$x = arctg\ t \qquad dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x + 2} = \int \frac{1}{\dfrac{t^2}{1+t^2} + 4\dfrac{1}{1+t^2} + 2} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{dt}{t^2 + 4 + 2\left(1+t^2\right)}$$

$$= \int \frac{dt}{3t^2+6} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\,arctg\,\frac{t}{\sqrt{2}} + C$$

2) $\int \sin^\alpha x\ \cos^\beta x\ dx\ ,\quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

Considerăm două cazuri:

a) α sau β este număr pozitiv impar. De exemplu, $\beta = 2k+1$, cu $k > 0$ întreg.

$$\int \sin^\alpha x\ \cos^{2k+1} x\ dx = \int \sin^\alpha x\left(\cos^2 x\right)^k \cos x\ dx = \int \sin^\alpha x\left(1-\sin^2 x\right)^k \cos x\ dx$$

$$t = \sin x$$
$$dt = \cos x\ dx$$

$$\int \sin^\alpha x\ \cos^{2k+1} x\ dx = \int t^\alpha \left(1-t^2\right)^k dt$$

Aplicăm teorema binomială şi obținem funcții putere uşor integrabile.

Exemple:

1) $\int \sin^2 x\ \cos^5 x\ dx = \int \sin^2 x\ \cos^4 x\ \cos x\ dx = \int \sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)^2 \cos x\ dx$

$$t = \sin x \qquad dt = \cos x\ dx$$

$$\int \sin^2 x\ \cos^5 x\ dx = \int t^2\left(1-t^2\right)^2 dt = \int \left(t^2 - 2t^4 + t^6\right)dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$$

2) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \sin x \, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x \, dx$

$t = \cos x \qquad dt = -\sin x \, dx$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{1-t^2}{t^2} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C$$

3) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sqrt{\sin x}} \cos x \, dx$

$t = \sin x \qquad dt = \cos x \, dx$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int \frac{1-t^2}{\sqrt{t}} dt = \int \left(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}} \right) dt = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = 2\sqrt{\sin x} - \frac{2}{5}\sqrt{\sin^5 x} + C$$

b) α şi β sunt numere pozitive pare, $\alpha = 2m \quad \beta = 2n$, $m, n \in \mathbb{N}$

Manipulăm funcția de sub integrală aplicând formulele trigonometrice:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \text{pentru } m \neq n$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \qquad \text{pentru } m = n$$

□ $m \neq n$

$$\int \sin^{2m} x \cos^{2n} x \, dx = \int \left(\sin^2 x\right)^m \left(\cos^2 x\right)^n dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^m \left(\frac{1+2\cos x}{2}\right)^n dx =$$

$$= \frac{1}{2^{m+n}} \int \left(1-\cos 2x\right)^m \left(1+2\cos x\right)^n dx$$

Aplicăm teorema binomială factorilor $(1-\cos 2x)^m$ şi $(1+\cos 2x)^n$, înmulțim polinoamele astfel obținute şi ajungem la integrale din puteri pare sau impare de $\cos 2x$. Termenilor cu puteri impare în $\cos 2x$, le aplicăm tehnica precedentă, iar termenilor cu puteri pare în $\cos 2x$, le aplicăm iar

$$\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$$

Continuăm procedeul până când ajungem la integrale de forma $\int \cos kx \, dx$.

☐ $m = n$

$$\int \sin^{2n} x \cos^{2n} x \, dx = \int (\sin x \cos x)^{2n} \, dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^{2n} dx = \frac{1}{4^n}\int \sin^{2n} 2x dx$$

$$= \frac{1}{4^n}\int \left(\sin^2 2x\right)^n dx = \frac{1}{4^n}\int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^n dx == \frac{1}{8^n}\int (1-\cos 4x)^n \, dx$$

Se aplică teorema binomială etc.

Exemple:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right) dx$$

$$= \int \left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x-\cos 2x-2\cos^2 2x-\cos^3 2x\right) dx$$

$$= \int \left(1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left[1+\cos 2x-\frac{1+\cos 4x}{2}-\left(1-\sin^2 2x\right)\cos 2x\right] dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x+\sin^2 2x \cos 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{2}\frac{\sin^3 2x}{3}\right)+C$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \, dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C$$

3) $\int \sin \alpha x \cos \beta x \, dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x \, dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x \, dx$, $\alpha \neq \beta$

Pentru a calcula aceste integrale sunt utile următoarele identități trigonometrice:

$$\sin\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x\right]$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)x+\cos(\alpha-\beta)x\right]$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x\right]$$

De exemplu,

$$\int\sin\alpha x\cos\beta x\,dx=\frac{1}{2}\int\left[\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x\right]dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta}-\frac{\cos(\alpha-\beta)x}{\alpha-\beta}\right]+C$$

$$\int\cos 3x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int\left[\cos(3+1)x+\cos(3-1)x\right]dx=\frac{1}{2}\int(\cos 4x+\cos 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C=\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

3.5 Integrala definită

Definiție: Fie $f(x)$ o funcție definită pe un interval închis $[a,b]$. Împărțim intervalul $[a,b]$ în n subintervale, alegând punctele:

$$x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k\ldots<x_n=b$$

Această mulțime de subintervale o numim *partiție* pe $[a,b]$.

Fie $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}>0$ lungimea subintervalului k şi fie ξ_k un punct arbitrar din subintervalul k. În această manieră construim o mulțime de puncte *intermediare* $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ asociate partiției date.

Fiind dată o partiție pe $[a,b]$ şi o mulțime de puncte intermediare pe această partiție putem evalua suma

$$S_n=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\ldots f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$$

unde $f(\xi_k)$ este valoarea lui $f(x)$ în punctul $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Această sumă o numim *sumă integrală Riemann* pentru $f(x)$ determinată de partiţia dată pe $[a,b]$ şi de punctele intermediare alese.

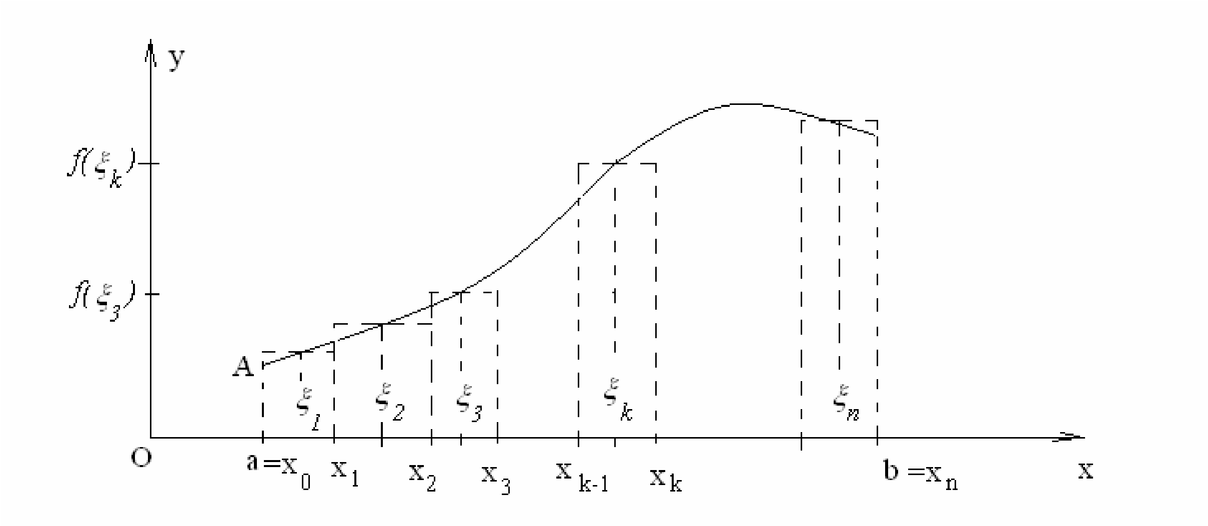


Figura 3.1

Observaţie: Suma Riemann depinde de modul de împărţire al intervalului $[a,b]$ în subintervale $[x_{k-1}, x_k]$ şi de alegerea punctelor intermediare ξ_k în aceste subintervale.

Fie λ cea mai mare lungime a subintervalelor $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,2,\ldots,n$, adică

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k$$

Definiţie: Spunem că numărul I este limita sumelor integrale $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ pentru $f(x)$ pe $[a,b]$, dacă $\forall \varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I \right| < \varepsilon$$

pentru orice partiţie pe $[a,b]$ cu $\Delta x_k < \delta$, $k = 1,2,\ldots,n$, adică pentru orice partiţie cu $\lambda < \delta$ şi pentru orice puncte intermediare ξ_k, $k = 1,2,\ldots,n$.

Scriem: $I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

Dacă există, această limită se numeşte *integrala definită* sau *integrala Riemann* şi se notează

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

$a =$ limita inferioară
$b =$ limita superioară
$x =$ variabila de integrare
$f(x) =$ integrand
$f(x)dx =$ element de integrare

Obs1: Integrala definită rămâne neschimbată dacă valoarea funcției $f(x)$ se modifică într-un punct $c \in [a,b]$. Adică, dacă funcția $f(x)$ trece în funcția

$$g(x) = \begin{cases} f(x), \forall x \in [a,b] - \{c\} \\ A, x = c \end{cases}$$

unde, $A \neq f(c)$, atunci $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

Această proprietate rămâne valabilă dacă $f(x)$ este modificat într-un număr finit de puncte din $[a,b]$.

Obs2: In definiția integralei definite s-a considerat $a < b$. Includerea cazurilor $a = b$ şi $a > b$ se face considerând:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad \text{pentru} \quad a = b$$
$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \quad \text{pentru} \quad a > b$$

Exemplu:

Calculați $\int_a^b dx$

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})$$

$$= \lim_{\lambda \to 0}\left[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots (x_n - x_{n-1})\right] = \lim_{\lambda \to 0}(x_n - x_0) = \lim_{\lambda \to 0}(b - a) = b - a$$

Teorema 1: Dacă o funcție $f(x)$ este integrabilă (are integrală definită) pe un interval închis $[a,b]$, atunci $f(x)$ este mărginită pe $[a,b]$.

Remarcă: O funcție poate fi mărginită pe $[a,b]$, dar să nu fie integrabilă pe $[a,b]$.

Exemplu:

Funcția Dirichlet

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$$

este mărginită pe intervalul $[0,1]$ deoarece $|f(x)|\le 1$ pentru $\forall x\in[0,1]$, dar $f(x)$ nu este integrabilă pe $[0,1]$.

Într-adevăr, suma integrală $S_n=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ pentru orice şir rațional de puncte intermediare ξ_k, $k=1,\dots,n$ devine

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}1\cdot\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=1-0=1$$

iar pentru orice şir irațional de puncte intermediare este

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}0\cdot\Delta x_k=0$$

Atunci pentru orice $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$, oricât de mic, suma integrală S_n este egală fie cu unu fie cu zero. În această situație S_n nu are limită pentru $\lambda\to 0$, deci funcția $f(x)$ nu este integrabilă pe $[0,1]$.

Teorema 2: Dacă o funcție $f(x)$ este continuă pe un interval închis $[a,b]$, atunci $f(x)$ este integrabilă pe $[a,b]$.

Exemplu: $f(x)=e^{-x^2}$ este continuă pe $[0,a]$, deci este integrabilă pe $[0,a]$, adică există integrala definită

$$\int_0^a e^{-x^2}dx$$

Teorema 3: Dacă o funcție $f(x)$ este definită şi monotonă pe un interval închis $[a,b]$, atunci $f(x)$ este integrabilă pe $[a,b]$.

Teorema 4: Dacă funcția $f(x)$ este mărginită pe intervalul închis $[a,b]$ şi dacă $f(x)$ are un număr finit de puncte de discontinuitate pe $[a,b]$, atunci $f(x)$ este integrabilă pe $[a,b]$.

Exemplu:

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$$

este integrabilă pe intervalul închis $[0,1]$, deoarece $|f(x)|\leq 1$, $\forall x\in[0,1]$, deci este mărginită pe $[0,1]$ şi funcţia are un singur punct de discontinuitate de speţa a doua în $x=0$.

Proprietăţi:

Presupunem toate funcţiile continue şi deci integrabile pe un interval închis $[a,b]$.

1. Integrala definită depinde numai de limitele sale inferioară şi superioară, de integrandul $f(x)$ şi este independentă de variabila de integrare

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du$$

2. Liniaritate

$$\int_a^b Af(x)dx=A\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx$$

3. Aditivitate

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

4. Monotonie: Fie $f(x)$ şi $g(x)$ două funcţii integrabile pe $[a,b]$, pentru care are loc relaţia $f(x)\leq g(x)$ pe $[a,b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$$

5. Dacă $f(x)$ este integrabilă pe $[a,b]$ atunci şi funcţia $|f(x)|$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi are loc inegalitatea:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

6. Fie m şi M minimul şi maximul lui $f(x)$ pe $[a,b]$. Atunci

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

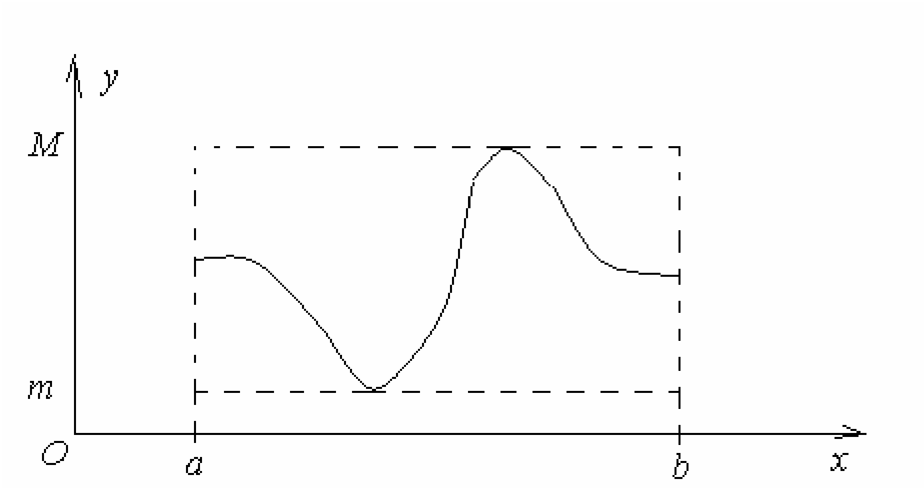


Figura 3.2

Exemplu:

Evaluaţi integrala $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10+6\sin x}}$

$$m = \min_{0\le x\le 2\pi} \frac{1}{\sqrt{10+6\sin x}} = \left.\frac{1}{\sqrt{10+6\sin x}}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$M = \max_{0\le x\le 2\pi} \frac{1}{\sqrt{10+6\sin x}} = \left.\frac{1}{\sqrt{10+6\sin x}}\right|_{x=\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

Cu proprietatea 6. avem:

$$\frac{1}{4}(2\pi-0) \le \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10+6\sin x}} \le \frac{1}{2}(2\pi-0)$$

$$\frac{\pi}{2} \le \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10+6\sin x}} \le \pi$$

3.6 Teoreme fundamentale pentru integrala definită

Teorema de medie: Fie $f(x)$ o funcție continuă pe un interval închis $[a,b]$. Atunci, există cel puțin un punct $\xi \in [a,b]$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi), \ \ \xi \in [a,b]$$

Interpretare geometrică:

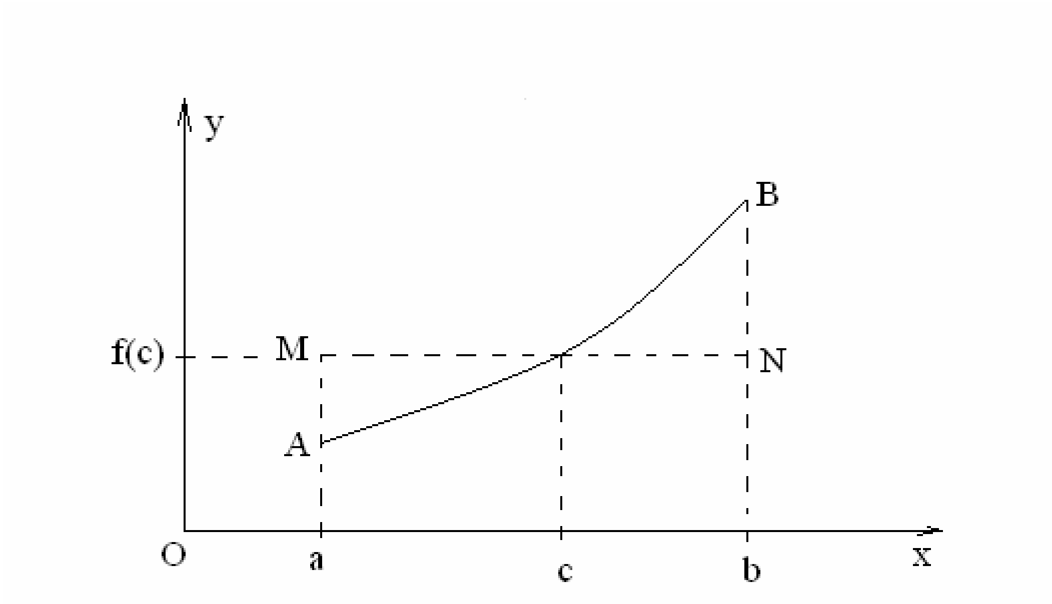


Figura 3.3

Pe graficul funcției continue $y = f(x)$, există punctul $C(c, f(c))$, astfel încât ariile $ABba$ şi $MNba$ sunt egale.

Numărul $M(f(x)) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ se numeşte *valoare medie* a funcției $f(x)$ pe $[a,b]$.

Exemplu: Calculați valoarea medie a funcției $f(x) = \sin x$ pe $[0,\pi]$.

$$M(\sin x)=\frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{1}{\pi}(-\cos\pi+\cos 0)=\frac{2}{\pi}$$

Fie $f(x)$ o funcţie continuă pe un interval închis $[a,b]$. Integrala definită nu depinde de variabila de integrare

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$$

Considerăm un punct arbitrar $x\in[a,b]$ şi construim o funcţie

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

Aceasta este definită $\forall x\in[a,b]$, deoarece dacă integrala lui $f(x)$ pe $[a,b]$ există, există şi integrala lui $f(x)$ pe $[a,x]$ pentru $\forall x\in[a,b]$.

Prima teoremă fundamentală de calcul: Fie $f(x)$ o funcţie continuă pe un interval închis $[a,b]$. Atunci, funcţia $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ este derivabilă în orice punct $x\in[a,b]$ şi $F'(x)=f(x)$. Cu alte cuvinte, derivata integralei definite în raport cu limita sa superioară este egală cu valoarea integrandului în punctul limită superioară a integralei.

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x),\quad \forall x\in[a,b]$$

Demonstraţie: Fie $\Delta x\neq 0$, astfel încât $x+\Delta x\in[a,b]$. Creşterea corespunzătoare a funcţiei este:

$$\Delta F=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$

$$=\int_x^a f(t)dt+\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\overset{\text{teorema de medie}}{=}(x+\Delta x-x)f(x+\theta\Delta x)$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta x}=f(x+\theta\Delta x),\quad \theta\in[0,1]$$

$F'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=f(x)$ datorită continuităţii lui $f(x)$.

A doua teoremă fundamentală de calcul: Fie $f(x)$ o funcție continuă pe un interval închis $[a,b]$. Atunci, $f(x)$ are o primitivă pe $[a,b]$ şi în consecință $f(x)$ are integrală nedefinită.

Demonstrație: Deoarece $f(x)$ este continuă pe $[a,b]$, atunci există $\int_a^x f(t)dt$, $\forall x \in [a,b]$, adică există funcția $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ astfel încât $F'(x)=f(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Deci $F(x)$ este o primitivă a lui $f(x)$ pe $[a,b]$.

Integrala nedefinită a funcției $f(x)$ pe $[a,b]$ poate fi reprezentată în forma

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C$$

Teorema Newton-Leibniz: Fie $f(x)$ o funcție continuă pe un interval închis $[a,b]$ şi fie $F(x)$ o primitivă a lui $f(x)$ pe $[a,b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

Demonstrație:

Fie $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b]$

$\Phi(x)$ este o primitivă pentru $f(x) \Rightarrow \Phi(x)=F(x)+C$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x)+C, \ \forall x \in [a,b]$$

$$x=a \Rightarrow \int_a^a f(t)dt = F(a)+C \Rightarrow C=-F(a)$$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x)-F(a),$$

$$x=b \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$$

$$t \to x \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

Exemple:

$$\int_2^4 x dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_2^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} 6$$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2$$

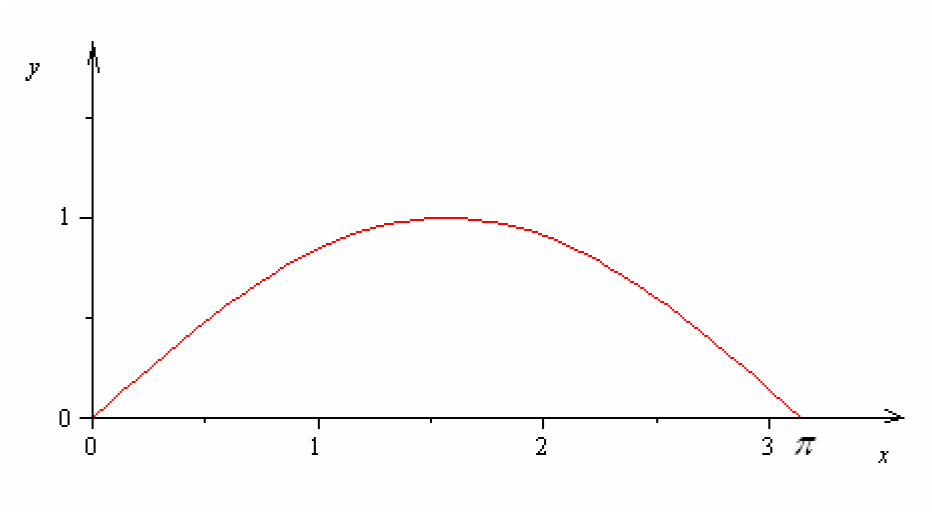


Figura 3.4 $f(x) = \sin x$

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = 0$$

Observație: Integrala reprezintă suma ariilor de sub curbă, deasupra axei *Ox*, minus ariile de sub axa *Ox*.

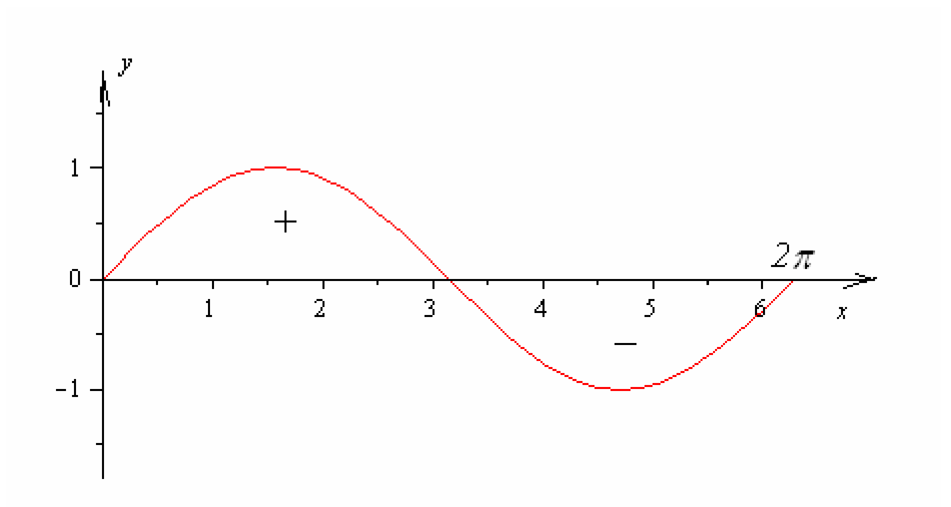


Figura 3.5 $f(x) = \sin x$

Intergerea prin substituție

Considerăm integrala $\int_a^b f(x)dx$ în care $f(x)$ este continuă pe $[a,b]$ şi fie $x=\varphi(t)$.

Presupunem că $\varphi(t)$ satisface condițiile:

- ☐ $\varphi(t)$ ia valori între *a* şi *b* atunci când *t* variază pe $[\alpha,\beta]$ a.î. $\varphi(\alpha)=a$ şi $\varphi(\beta)=b$.
- ☐ $\varphi'(t)$ este continuă pe $[\alpha,\beta]$.

Atunci:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Exemple:

1) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx\,, \quad a>0$

$$x=a\sin t$$
$$dx=a\cos t dt$$

$$0=a\sin t \quad \Rightarrow \quad t=0$$
$$a=a\sin t \quad \Rightarrow \quad t=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\; dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\; dt=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\; dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)=\frac{\pi a^2}{4}$$

2) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$

$$x=e^t$$
$$dx=e^t dt$$

$$1=e^t \quad \Rightarrow \quad t=0$$
$$e=e^t \quad \Rightarrow \quad t=1$$

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_0^1 \frac{t^2}{e^t} e^t dt = \int_0^1 t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Uneori este convenabil să folosim substituția $t = \psi(x)$ în loc de $x = \varphi(t)$.

3) $$\int_0^1 \left(2x^3 - 1\right)\sqrt{x^4 - 2x + 1}\, dx$$

$$t = x^4 - 2x + 1$$
$$dt = \left(4x^3 - 2\right)dx = 2\left(2x^3 - 1\right)dx$$

$$\int_0^1 \left(2x^3 - 1\right)\sqrt{x^4 - 2x + 1}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{t}dt = \left.\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^0 = -\frac{1}{3}$$

Observație: Fie $f(x)$ o funcție inegrabilă pe un interval închis simetric $[-a, a]$ cu $a > 0$. Atunci:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & \text{daca } f(x) \text{ este para} \\ 0\,, & \text{daca } f(x) \text{ este impara} \end{cases}$$

Exemplu:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x\, e^{\cos x} dx = 0$$ deoarece integrandul este funcție impară

Integrarea prin părți

Fie funcțiile $u(x)$ şi $v(x)$ cu derivate $u'(x)$ şi $v'(x)$ continue pe $[a,b]$. Atunci are loc:

$$\int_a^b u\, dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\, du$$

Exemple:

1) $$\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin x\, dx$$

$$u = \pi - x \qquad dv = \sin x \, dx$$
$$du = -dx \qquad v = -\cos x$$

$$\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin x \, dx = -(\pi - x)\cos x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x \, dx = -(\pi - x)\cos x\Big|_0^{\pi} - \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi$$

2) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

$$u = \ln x \qquad dv = \frac{dx}{x^2}$$
$$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = -\frac{1}{x}$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^e - \frac{1}{x}\Big|_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$

Integrale improprii

Până acum domeniul de integrare al unei funcții era un interval mărginit. Anumite aplicații din fizică duc la integrarea unor funcții pe domenii nemărginite.

Definiție: O *integrală improprie,* definită prin

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \overset{def}{=} \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

se spune că este convergentă dacă limita există şi divergentă dacă limita nu există.

Exemple

1) Integrala improprie $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge şi este egală cu $\dfrac{\pi}{2}$.

Într-adevăr,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b\to+\infty} arctg\ x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} arctg\ b = \frac{\pi}{2}$$

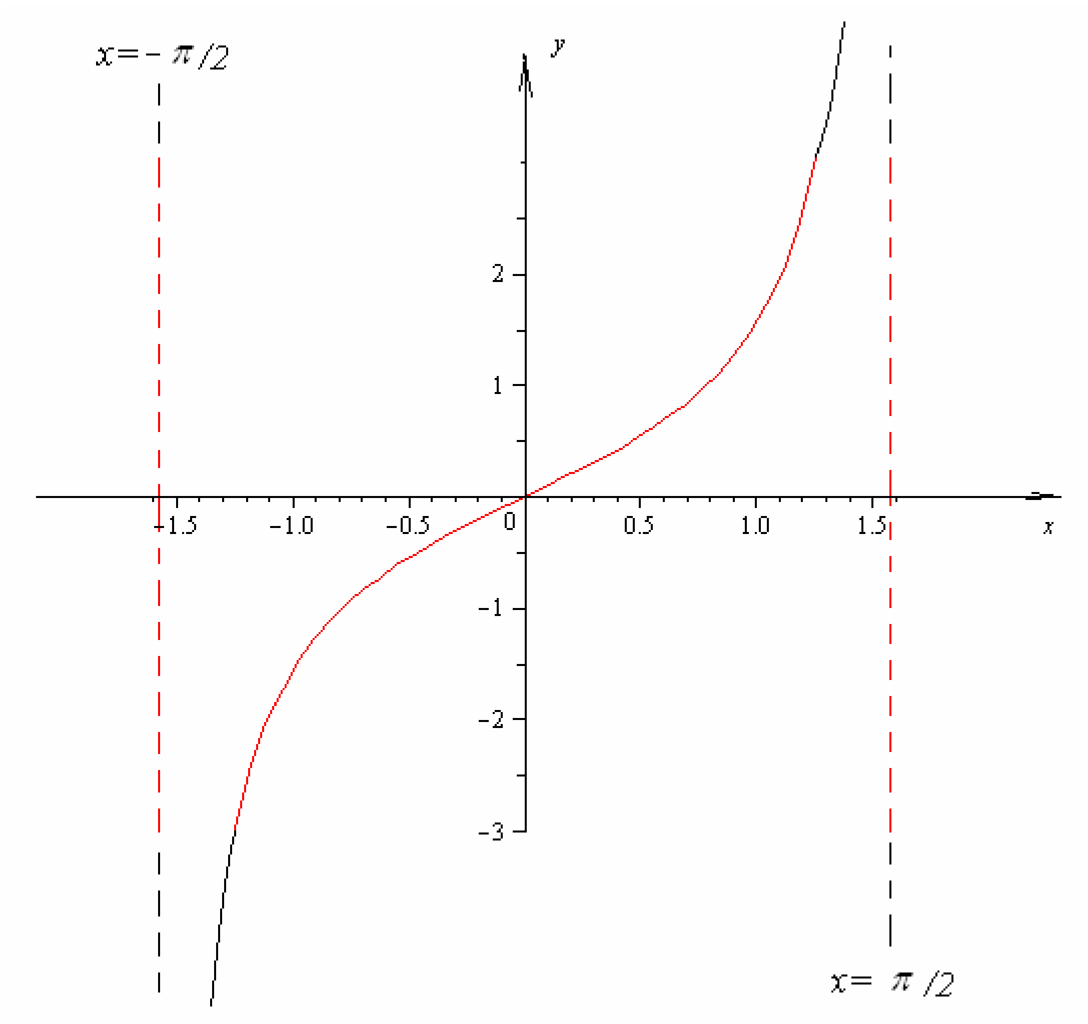


Figura 3.6 $f(x) = tg(x)$

2) Integrala improprie $\int_0^{+\infty} \cos x \, dx$ este divergentă.

Într-adevăr,

$$\int_0^{+\infty} \cos x \, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \cos x \, dx = \lim_{b \to +\infty} \sin x \Big|_0^b = \lim_{b \to +\infty} \sin b \qquad \text{limită ce nu există.}$$

Cap.4 Funcții de mai multe variabile

4.1 Definiții şi notații

Multe funcții din lumea reală depind de două sau mai multe variabile.
De exemplu, volumul unui paralelipiped dreptunghic cu muchiile *x, y* şi *z* este $V = x\,y\,z$, unde *x, y* şi *z* sunt numere pozitive. Valoarea volumului *V* este o funcție de trei variabile cele trei dimensiuni *x, y* şi *z.*
Temperatura măsurată pe glob este o funcție de două variabile, anume latitudinea şi longitudinea locului.

Fie $\mathbb{R}^n$ spațiul Euclidian *n*-dimensional şi fie $M'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ şi $M''(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$ două puncte în acest spațiu. Notăm cu $\rho(M', M'')$ *distanța* dintre punctele M' şi M''

$$\rho(M', M'') = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k'' - x_k')^2} \tag{1}$$

Cazuri particulare:

$n = 1$ $\rho(M', M'') = |x_1'' - x_1'|$ reprezintă distanța dintre două puncte $M'(x_1')$ şi $M''(x_1'')$ de pe o dreaptă.

$n = 2$ $\rho(M', M'') = \sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_2')^2}$ reprezintă distanța dintre două puncte $M'(x_1', x_2')$ şi $M''(x_1'', x_2'')$ din plan.

Definiție: Fie punctul $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ şi fie ε un număr pozitiv real. Mulțimea tuturor punctelor $M \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $\rho(M, M_0) < \varepsilon$ se numeşte *sferă deschisă n-dimensională* cu centrul în M_0 şi rază ε.

Cazuri particulare:

$n=2 \quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2$ defineşte un disc circular cu centrul $M_0(x_0,y_0)$ şi rază ε (fără cercul exterior).

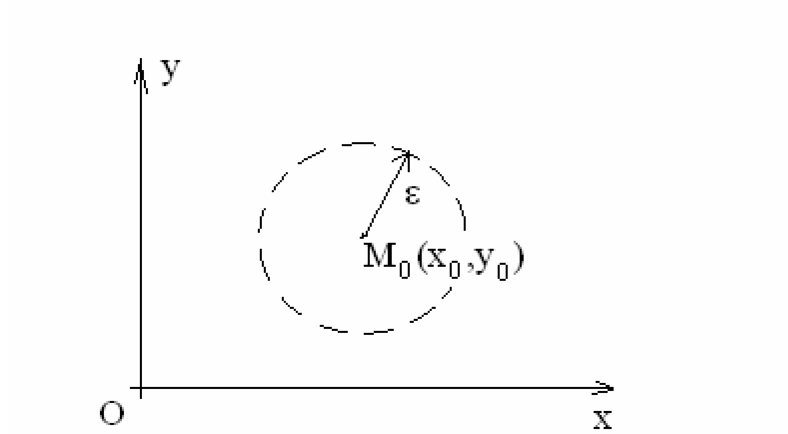


Figura 4.1

$n=3 \quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<\varepsilon^2$ defineşte o sferă deschisă cu centrul în $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şi rază ε.

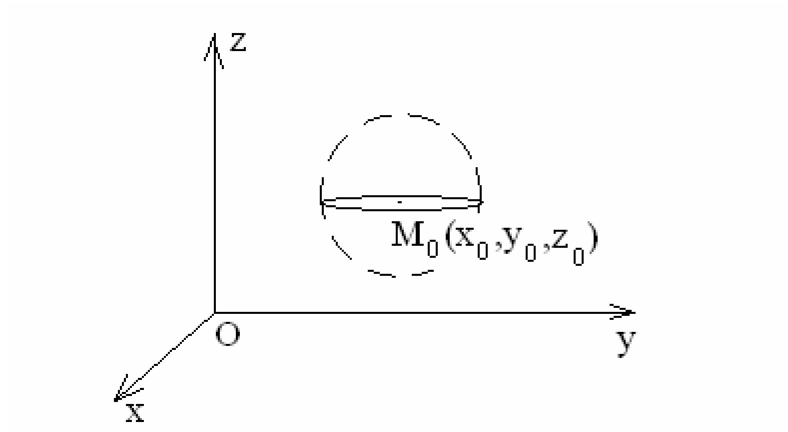


Figura 4.2

Considerăm un alt tip de vecinătate pentru punctul $M_0\left(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0\right)$, şi anume o vecinătate rectangulară formată din toate punctele $M(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ astfel încât

$$x_i^0-\varepsilon_i<x_i<x_i^0+\varepsilon_i\,, \quad \varepsilon_i>0 \quad i=1,2,\dots,n$$

Cazuri particulare:

$n=1 \;\Rightarrow$ vecinătatea se reduce la $\varepsilon-$vecinătatea $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$ lui x_0.
$n=2 \;\Rightarrow$ vecinătatea se reduce la figura plană mărginită de un dreptunghi cu laturile $2\varepsilon_1$ şi $2\varepsilon_2$.

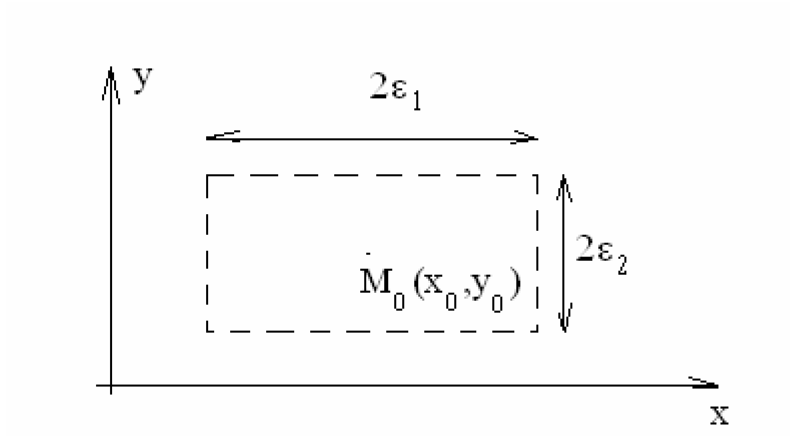


Figura 4.3

$n=3 \;\Rightarrow$ vecinătatea se reduce la paralelipipedul deschis cu centrul în $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ şi muchiile $2\varepsilon_1,2\varepsilon_2,2\varepsilon_3$.

Definiţii:

Fie mulţimea $E\subset\mathbb{R}^n$. Punctul $M\subset E$ se numeşte *punct interior* pentru *E* dacă există $\varepsilon>0$ astfel încât *E* să conţină pe *M* împreună cu $\varepsilon-$vecinătatea sa.

Mulţimea *E* se numeşte mulţime *deschisă* dacă *E* conţine numai puncte interioare. Exemplu: pentru $n=2$ orice disc circular este mulţime deschisă.

Punctul *P*, $P\in\mathbb{R}^n$, se numeşte *punct de frontieră*, pentru mulţimea $E\subset\mathbb{R}^n$ dacă orice vecinătate a lui *P* conţine puncte din *E* şi din afara lui *E*.

Mulţimea tuturor punctelor frontieră pentru *E* se numeşte *frontiera* lui *E.* Notăm frontiera lui *E* cu ∂E.

Reuniunea lui *E* cu ∂E formează o mulţime închisă $\overline{E}=E\cup\partial E$. Exemplu: reuniunea unui disc circular cu cercul de frontieră este un disc închis.

$E\subset\mathbb{R}^n$ se numeşte *conexă* dacă pentru orice două puncte din *E* există o curbă continuă care le uneşte şi este conţinută în *E*. Altfel se numeşte *neconexă*.

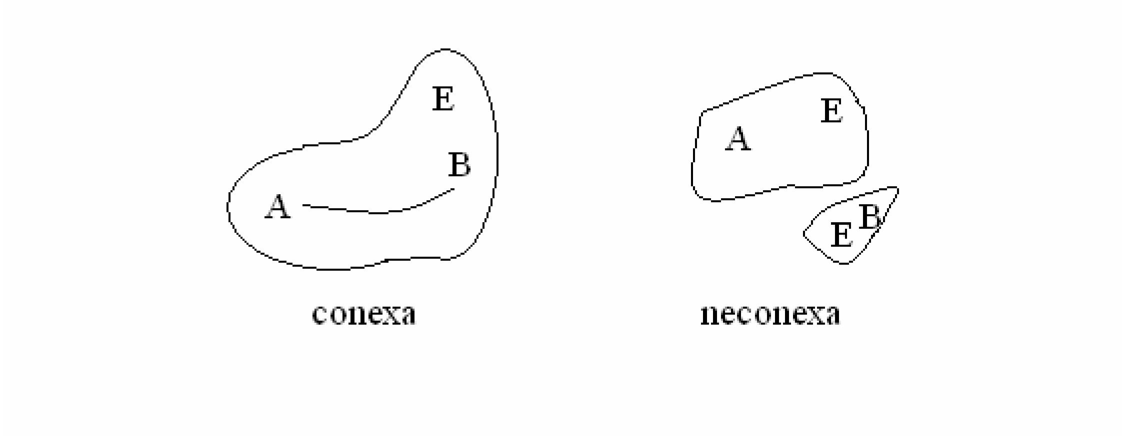


Figura 4.4

O mulțime deschisă şi conexă se numeşte *domeniu*.

Un domeniu se numeşte *mărginit* dacă există o sferă care să conțină domeniul.

Orice domeniu care conține un punct M_0 este vecinătate pentru M_0 .

Noțiunea de funcție de mai multe variabile

Presupunem că există o lege care asociază la fiecare punct $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ al mulțimii $E \subset \mathbb{R}^n$, un număr real *u*. Spunem că am definit o funcție de punctul *M* sau o funcție de *n* variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi scriem

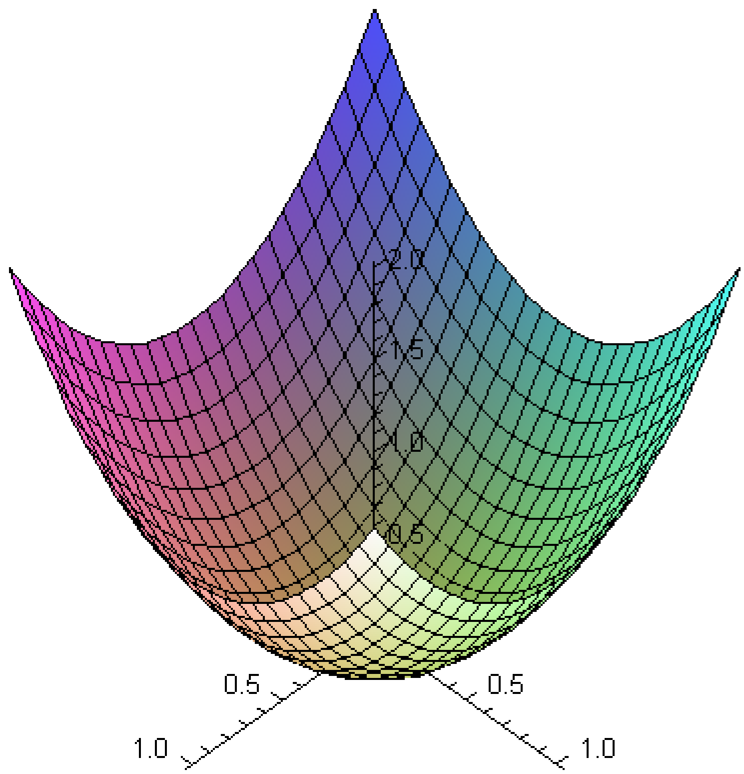
$$u = f(M) \quad \text{sau} \quad u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad M \in E$$

E este domeniul de definiție al funcției *f*.

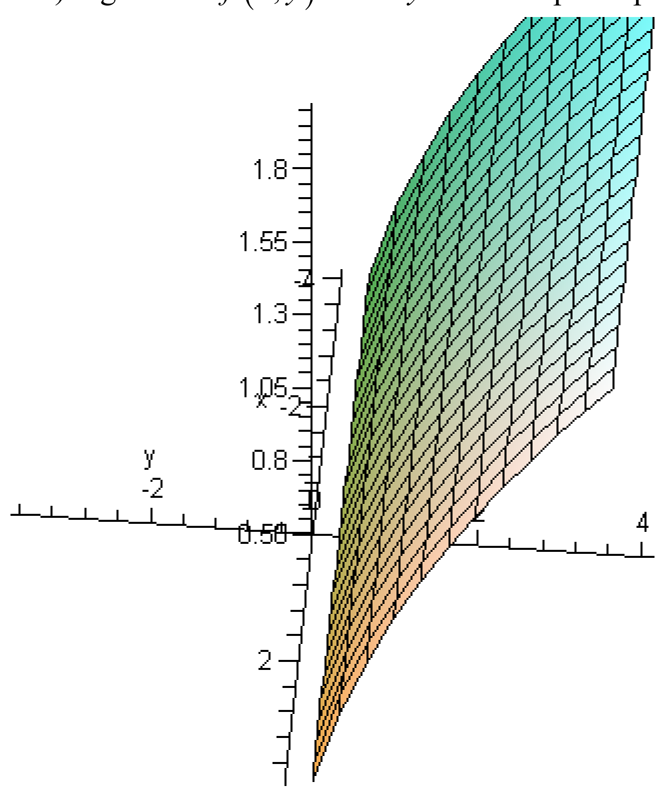
Ne vom limita la funcții de două variabile $z = f(x, y)$. Rezultatele pot fi generalizate la funcții de mai multe variabile.

Fie $z = f(x, y)$ o funcție definită pe un domeniu *E* din planul *xy*. Domeniul poate fi tot planul $\mathbb{R}^2$ sau mai puțin.

Exemple:



1) Figura 4.5 $f(x,y)=x^2+y^2$ definită pe tot planul xy



2) Figura 4.6 $f(x,y)=\sqrt{y}$ definită numai pentru $y \geq 0$

3. $f(x,y)=\dfrac{1}{x+y}$ definită numai pentru $x+y\neq 0$

Problemă: Cum vizualizăm o funcție de două variabile?

Fie $z=f(x,y)$

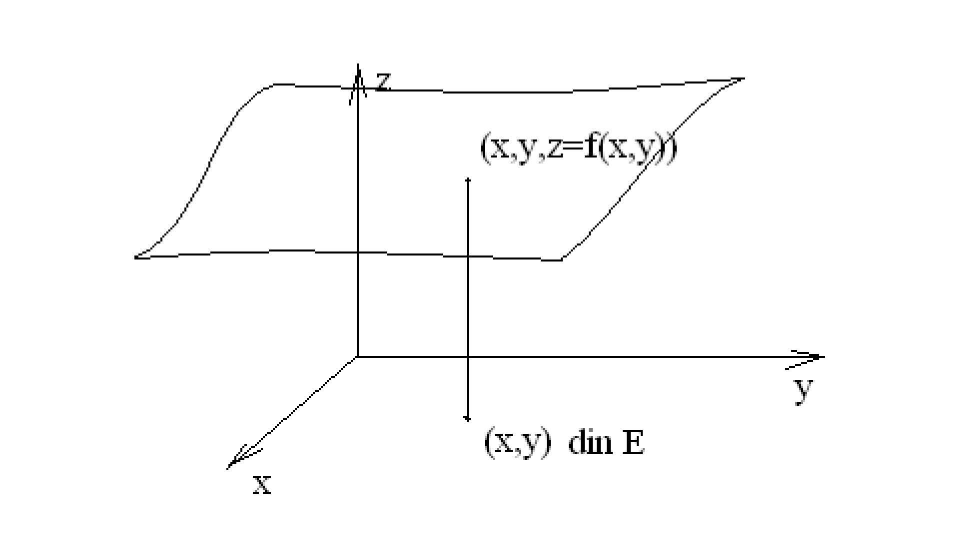


Figura 4.7

Atunci, fiecare punct $(x,y)\in E$ este asociat cu un punct $(x,y,f(x,y))$ din $\mathbb{R}^3$. Mulțimea tuturor punctelor $(x,y,f(x,y))$ cu $(x,y)\in E$ se numeşte *graficul* funcției $z=f(x,y)$ şi formează o suprafață.

Exemple: 1) $f(x,y)=-y$ Graficul $z=-y$ este un plan.

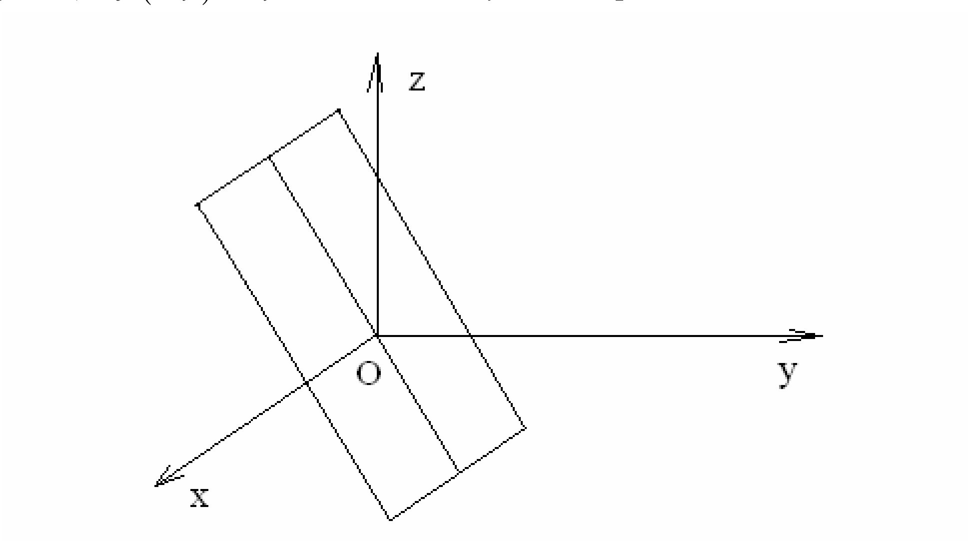


Figura 4.8 $f(x,y)=-y$

2) $f(x,y)=x^2+y^2$

Graficul funcției $z=x^2+y^2$ este un paraboloid de revoluție.

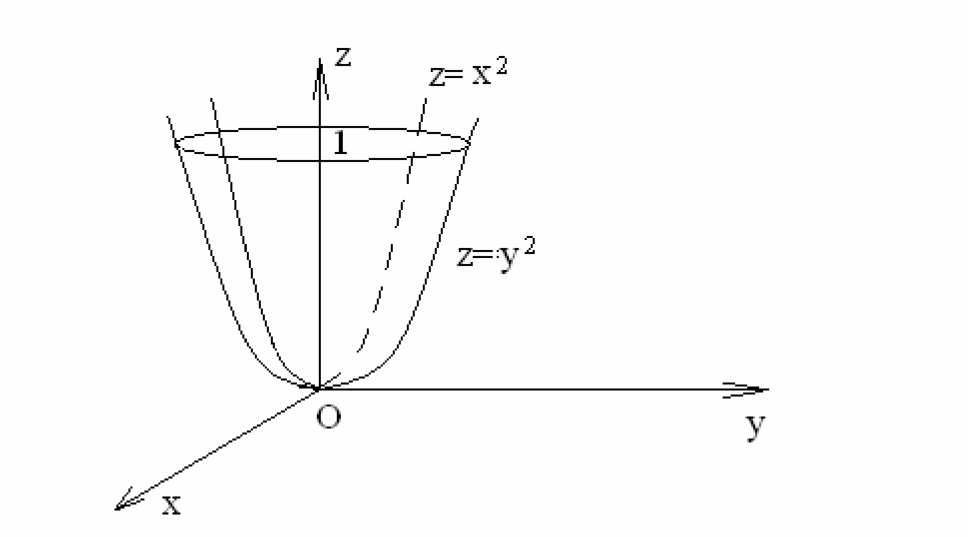


Figura 4.9

În planul yz definit de ecuația $x=0$ intersecția cu suprafața este parabola $z=y^2$

În planul xz definit de ecuația $y=0$ intersecția cu suprafața este parabola $z=x^2$

În planul orizontal $z=1$ intersecția cu suprafața este cercul $x^2+y^2=1$

3) $f(x,y)=1-x^2-y^2$

Graficul funcției $z=1-x^2-y^2$ este un paraboloid de revoluție.

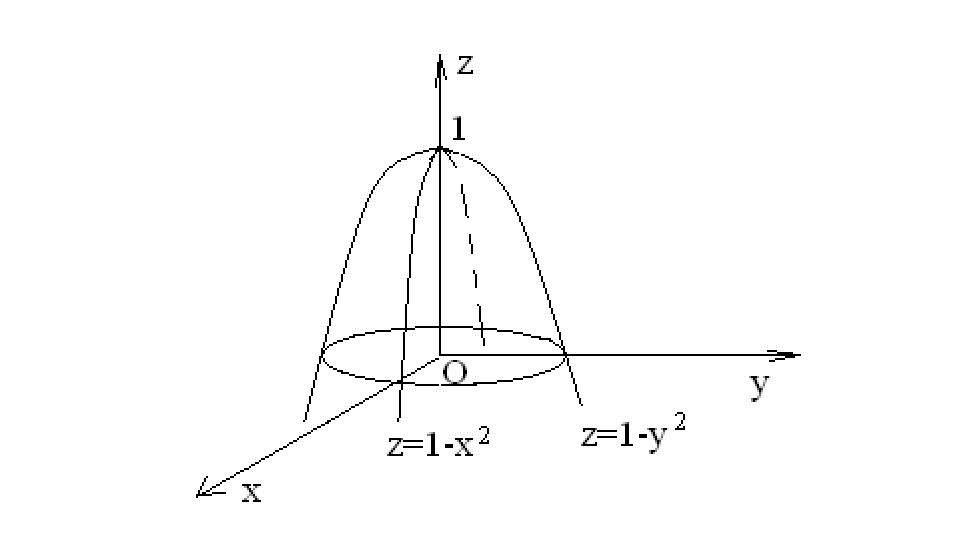


Figura 4.10

În planul yz definit de ecuația $x=0$ intersecția cu suprafața este parabola $z=1-y^2$

În planul xz definit de ecuația $y=0$ intersecția cu suprafața este parabola $z=1-x^2$

În planul orizontal $z=0$ intersecția cu suprafața este cercul $x^2+y^2=1$

4) $f(x,y)=y^2-x^2$

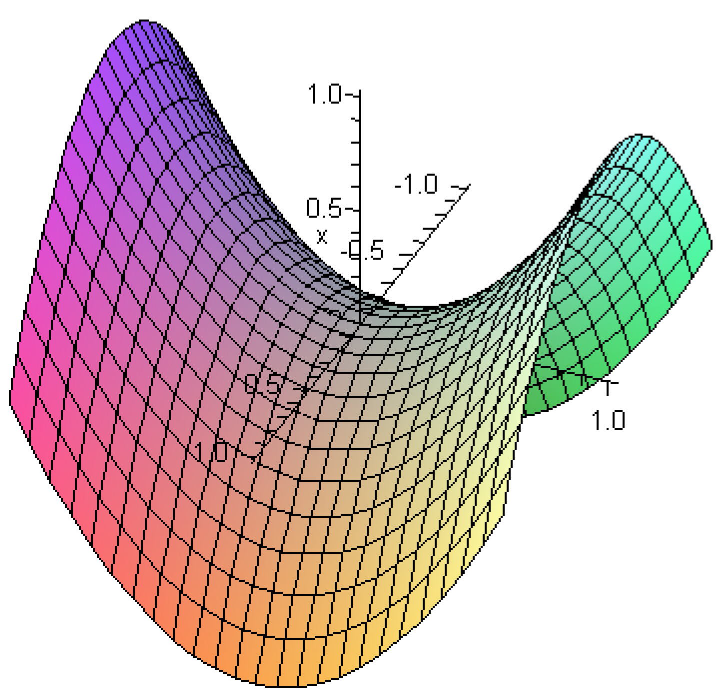


Figura 4.11 $f(x,y)=y^2-x^2$

În planul yz definit de ecuația $x=0$ intersecția cu suprafața este parabola $z=y^2$

În planul xz definit de ecuația $y=0$ intersecția cu suprafața este parabola $z=-x^2$

Datorită dificultății cerem computerului să reprezinte grafic funcțiile (vezi fig. 4.11).

Pentru a investiga şi vizualiza forma funcției $z=f(x,y)$ sunt utile aşa numitele *curbe de nivel* . O curbă de nivel este o mulțime de puncte din planul xy în care valoarea funcției este constantă

$$z=f(x,y)=c$$

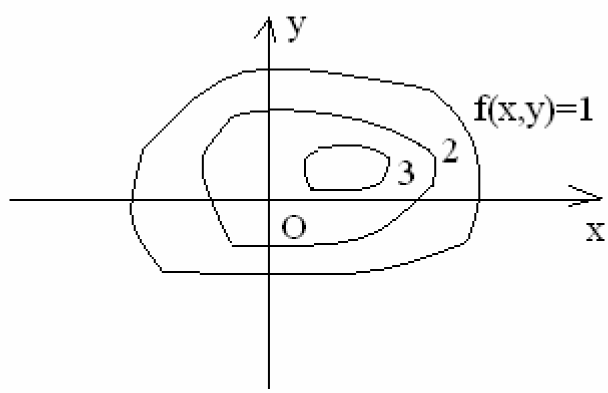


Figura 4.12

Curba de nivel poate fi construită intersectând suprafața $z=f(x,y)$ cu planul $z=c$ paralel cu planul xy şi apoi proiectând vertical curba de intersecție pe planul xy.

O colecție de curbe de nivel $f(x,z)=c_m$, $m=1,2,\ldots,k$ unde $c_{m+1}-c_m=h=ct$ furnizează informații utile despre comportamentul funcției.

Observație: Cu cât curbele de nivel sunt mai apropiate între ele cu atât viteza de modificare a funcției este mai mare.

Exemplu: $z=x^2+y^2$
Curbele sale de nivel sunt cercuri cu centrul în originea sistemului de coordonate.

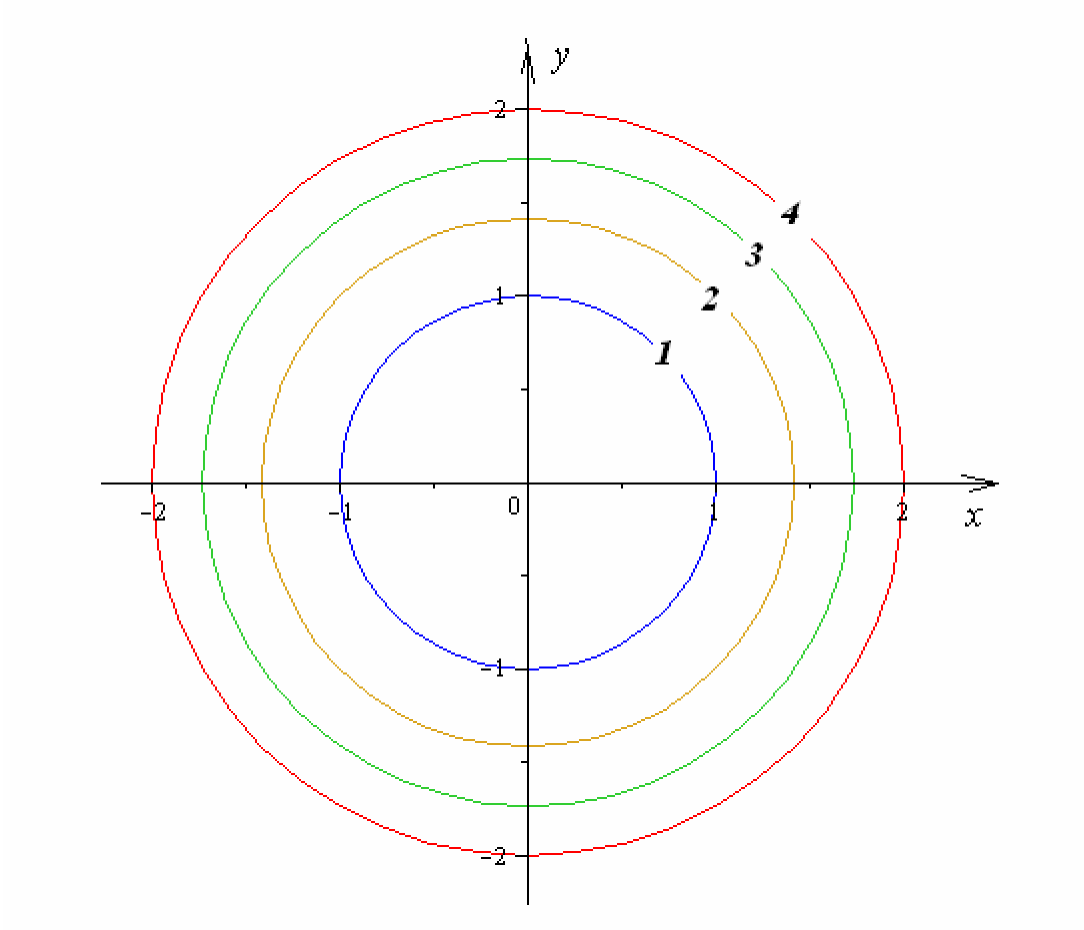


Figura 4.13

$$f(x,y)=0 \quad x^2+y^2=0$$
$$f(x,y)=1 \quad x^2+y^2=1$$
$$f(x,y)=2 \quad x^2+y^2=2$$
$$f(x,y)=3 \quad x^2+y^2=3$$
$$f(x,y)=4 \quad x^2+y^2=4$$

Pentru funcții de trei variabile, echivalentul curbelor de nivel sunt *suprafețele de nivel*. Suprafața de nivel a funcției $u=f(x,y,z)$ este o mulțime de puncte $M(x,y,z)$ din spațiu în care $u=f(M)$ este constant.

Exemplu: Suprafețele de nivel ale funcției $u=x^2+y^2+z^2$ sunt sfere cu centrul în originea sistemului de coordonate.

4.2 Limite şi continuitate

Definiția 1: Fie $f(M)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului $M_0(x_0, y_0)$ cu o posibilă excepție în M_0. Numărul *A* se numeşte *limita* lui $f(M)$ în punctul $M_0(x_0, y_0)$ dacă $\forall \varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât

$$\left| f(M) - A \right| < \varepsilon$$

pentru $M \in \Omega$ cu $0 < \rho(M, M_0) < \delta$.

Notații: $A = \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ sau $A = \lim\limits_{x \to x_0, y \to y_0} f(x, y)$

Observație: Se presupune că *M* poate tinde la M_0 într-un mod arbitrar (de-a lungul unei direcții arbitrare sau după orice lege arbitrară) şi că toate valorile limită a lui $f(M)$ astfel obținute trebuie să fie egale cu numărul *A*.

Exemple:

1) $f(x, y) = x^2 + y^2$ definită pe planul *xy* şi $f(0,0) = 0$. Arătăm că limita acestei funcții în $O(0,0)$ este zero.

Considerăm $\varepsilon > 0$. Atunci, $\left| f(x, y) - 0 \right| < \varepsilon$ devine $\left| x^2 + y^2 \right| < \varepsilon$. Deoarece distanța de la un punct arbitrar $M(x, y)$ la originea *O* este $\rho(M, O) = \sqrt{x^2 + y^2}$, putem scrie relația $\left| x^2 + y^2 \right| < \varepsilon$ în forma $\rho^2(M, O) < \varepsilon$ sau $\rho(M, O) < \sqrt{\varepsilon}$.
Considerăm $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, atunci pentru orice punct $M(x, y)$ astfel încât $\rho(M, O) < \delta = \sqrt{\varepsilon}$ avem $\left| x^2 + y^2 - 0 \right| < \varepsilon$ sau $\left| f(x, y) - 0 \right| < \varepsilon$. Cu definiția limitei, $A = 0$ este limita funcției date în $O(0,0)$.

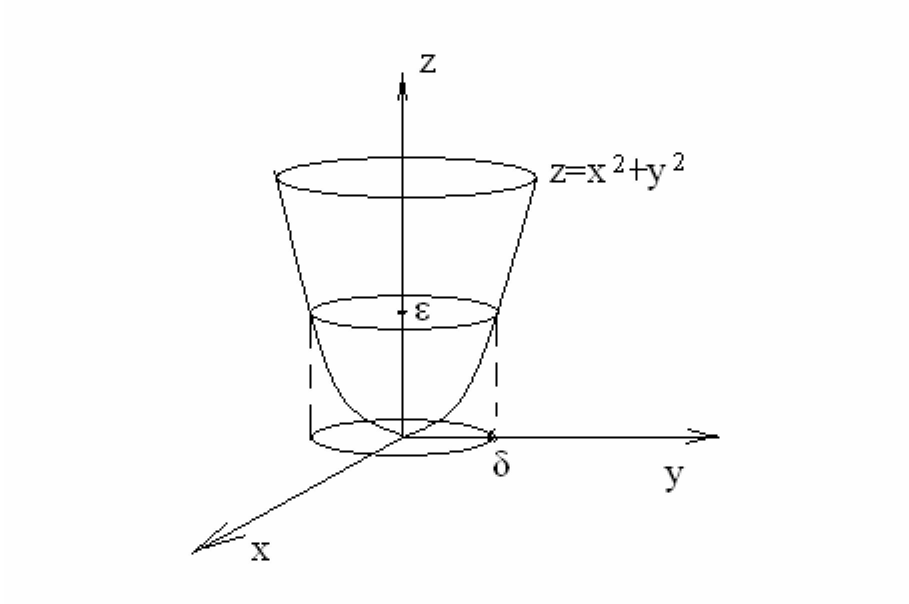


Figura 4.14

2) $f\left(x,y\right)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ definită pe planul xy mai puțin în originea $O\left(0,0\right)$.

Investigăm comportarea lui $f\left(x,y\right)$ în condițiile în care $\left(x,y\right)$ tinde la $O\left(0,0\right)$ de-a lungul liniilor $y=kx$, $x\neq 0$.

Dreptele definite de ecuațiile $y=kx$ trec prin origine şi avem

$$f\left(x,kx\right)=\frac{2x^2k}{\left(1+k^2\right)x^2},\quad x\neq 0.$$

Atunci,

$$f\left(x,kx\right)\to\frac{2k}{1+k^2}\quad \text{pentru}\quad x\to 0.$$

Pentru diferite valori ale lui *k*, valorile limitei sunt diferite. Aceasta înseamnă că funcția dată nu are limită în originea $O\left(0,0\right)$.

3) $f\left(x,y\right)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ definită pe planul xy mai puțin în originea $O\left(0,0\right)$.

Investigăm comportarea lui $f\left(x,y\right)$ în condițiile în care $\left(x,y\right)$ tinde la $O\left(0,0\right)$ de-a lungul liniilor $y=kx$, $x\neq 0$.

$$f\left(x,kx\right)=\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2},\quad x\neq 0.$$

$$f\left(x,kx\right)\to 0,\ \text{pentru}\ x\to 0.$$

Funcția are limita egală cu zero oricare ar fi dreapta $y=kx$, adică pentru orice dreaptă de-a lungul căreia punctul $\left(x,y\right)$ tinde la originea $O\left(0,0\right)$.

Dacă considerăm $y=x^2$ atunci $f\left(x,x^2\right)=1/2$, $x\neq 0$. Aceasta înseamnă că limita există când punctul $\left(x,y\right)$ tinde la originea $O\left(0,0\right)$ mişcându-se pe parabola $y=x^2$. Deoarece această limită este $1/2\neq 0$, funcția dată nu are limită în punctul $O\left(0,0\right)$.

Teorema 1: Fie $f(M)$ şi $\varphi(M)$ două funcții care au limită în M_0. Atunci suma $f(M)+\varphi(M)$, diferența $f(M)-\varphi(M)$, produsul $f(M)\cdot\varphi(M)$ şi raportul $f(M)/\varphi(M)$ (cu condiția $\lim\limits_{M\to M_0}\varphi(M)\neq 0$) au limită în M_0 şi

$$\lim_{M\to M_0}\left[f(M)\pm\varphi(M)\right]=\lim_{M\to M_0}f(M)\pm\lim_{M\to M_0}\varphi(M)$$

$$\lim_{M\to M_0}\left[f(M)\cdot\varphi(M)\right]=\lim_{M\to M_0}f(M)\cdot\lim_{M\to M_0}\varphi(M)$$

$$\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)}{\varphi(M)}=\frac{\lim\limits_{M\to M_0}f(M)}{\lim\limits_{M\to M_0}\varphi(M)},\qquad \lim_{M\to M_0}\varphi(M)\neq 0$$

Definiția 2: Fie $f(M)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului M_0 cu o posibilă excepție în M_0. Numărul A se numeşte *limita* lui $f\left(M\right)$ în punctul M_0 dacă pentru orice şir de puncte $\{M_n\}$ care converge la M_0, $M_n\in\Omega$, $M_n\neq M_0$, şirul imagine $\{f(M_n)\}$ convege la A.

Observație: Noțiunea de limită de mai sus, presupune ca toate variabilele să tindă simultan la valorile lor limită, adică $(x,y)\to(x_0,y_0)$.

Definiția 1: Fie $f\left(M\right)$ o funcție definită într-un punct $M_0\left(x_0,y_0\right)$ şi pe o vecinătate Ω a punctului $M_0\left(x_0,y_0\right)$. Funcția $f\left(M\right)$ este *continuă* în $M_0\left(x_0,y_0\right)$ dacă

$$\lim_{M\to M_0}f(M)=f(M_0)\quad\text{sau}\quad\lim_{x\to x_0,y\to y_0}f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

Remarcă: Se presupune că în această definiție punctul $M(x, y)$ tinde la $M_0(x_0, y_0)$ într-un mod arbitrar şi este tot timpul conținut în domeniul lui $f(M)$.

Definiția 2 (cu $\varepsilon - \delta$): Fie $f(M)$ o funcție definită într-un punct M_0 şi pe o vecinătate Ω a punctului M_0. Funcția $f(M)$ este *continuă* în M_0 dacă $\forall \varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât

$$|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$$

pentru $M \in \Omega$ cu $\rho(M, M_0) < \delta$.

Fie Δx şi Δy creşterile variabilelor independente x şi y în deplasarea de la punctul $M_0(x_0, y_0)$ la $M(x, y)$.
Fie

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

creşterea funcției $z = f(x, y)$ corespunzătoare lui Δx şi Δy. Atunci expresia din definiția continuității

$$\lim_{x \to x_0, y \to y_0} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

este echivalentă cu

Definiția 3 a continuității: $$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \Delta z = 0$$

Observație: Dacă o funcție $f(x, y)$ este continuă într-un punct $M_0(x_0, y_0)$ atunci $f(x, y)$ este continuă în $M_0(x_0, y_0)$ în raport cu ambele variabile *x* şi *y*. Reciproca nu este totdeauna adevărată: dacă o funcție $f(x, y)$ este continuă într-un punct $M_0(x_0, y_0)$ în raport cu *x* şi în raport cu *y*, $f(x, y)$ nu este în mod necesar continuă în $M_0(x_0, y_0)$.

Teorema 2: Dacă $f(M)$ şi $\varphi(M)$ două funcții continue în M_0, atunci suma $f(M) + \varphi(M)$, diferența $f(M) - \varphi(M)$, produsul $f(M) \cdot \varphi(M)$ şi raportul $f(M) / \varphi(M)$ (cu condiția $\varphi(M_0) \neq 0$) sunt continue în M_0.

Dacă o funcție $f(M)$ este continuă în fiecare punct al domeniului *D*, $f(M)$ este continuă pe domeniul *D*.

Punctul în care $f(M)$ nu este continuă se numeşte *discontinuitate* pentru $f(M)$. Discontinuitățile unei funcții $f(x,y)$ pot fi fie puncte izolate, fie puncte dispuse pe curbe.

Exemple:

$$1) \quad f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$$

are o singură discontinuitate în $O(0,0)$.

$$2) \quad f(x,y)=\frac{1}{x^2-y^2}$$

are ca discontinuități dreptele $y=x$ şi $y=-x$.

Teorema 3: Dacă funcția $f(M)$ este continuă pe un domeniu mărginit şi închis, atunci $f(M)$ este mărginită pe *D* şi îşi atinge maximul absolut şi minimul absolut pe *D*.

4.3 Derivate parțiale

Fie $z=f(x,y)$ o funcție definită pe un domeniu *D* din planul *xy* şi fie (x,y) un punct interior lui *D*. Considerăm Δx o creştere a lui *x* astfel încât $(x+\Delta x, y)\in D$.

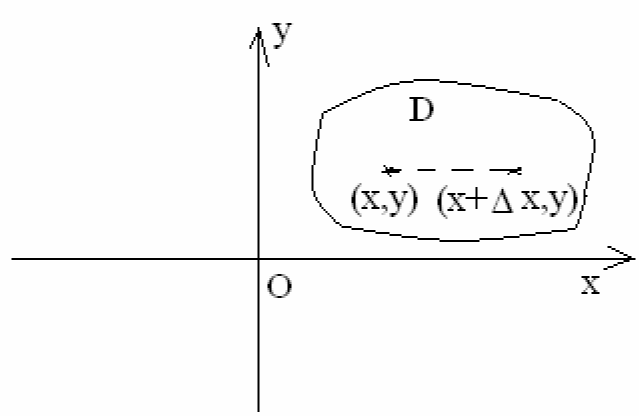


Figura 4.15

Creşterea

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$$

se numeşte *creştere parţială* în *z* determinată de creşterea Δx în *x*.

Fie $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ raportul creşterii parţiale în *z* şi creşterea corespunzătoare în *x*. Desigur acest raport este o funcţie de Δx .

Definiţia 1: Limita raportului $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ pentru $\Delta x \to 0$, dacă există, se numeşte *derivată parţială* a funcţiei $z = f(x, y)$ în punctul (x, y) în raport cu variabila independentă *x*.

Notaţii:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{sau} \quad f_x'(x, y) \quad \text{sau} \quad z_x'(x, y)$$

Cu aceste notaţii putem rescrie definiţia derivatei parţiale astfel:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Analog,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Fie $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcţie de *n* variabile. Atunci

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{\Delta x_k}$$

Definiţia 2: Derivata parţială a unei funcţii $z = f(x, y)$ în raport cu variabila *x* este o derivată ordinară în raport cu *x*, calculată considerând pe *y* constant. Similar, derivata parţială a unei funcţii $z = f(x, y)$ în raport cu variabila *y* este o derivată ordinară în raport cu *y*, calculată considerând pe *x* constant.

In aceste condiţii, derivatele ordinare şi derivatele parţiale se supun la aceleaşi reguli de diferenţiere.

Exemple:

Calculați derivatele parțiale ale următoarelor funcții.

1) $z = x^3 y + y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 2y$$

2) $z = e^{xy}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$$

3) $z = x^2 y + xe^y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + e^y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + xe^y$$

Interpretarea geometrică a derivatelor parțiale

Considerăm $z = f(x, y)$ o funcție continuă şi cu derivate parțiale pe un domeniu *D*. Fie *S* suprafața definită de ecuația $z = f(x, y)$.

Vrem să interpretăm geometric derivatele parțiale ale lui $f(x, y)$ în punctul $M_0(x_0, y_0) \in D$ care are corespondent pe suprafața $z = f(x, y)$ în punctul $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Atunci când calculăm derivata parțială $\frac{\partial z}{\partial x}$ în punctul $M_0(x_0, y_0)$ gândim $z = f(x, y)$ ca o funcție de o singură variabilă *x* şi tratăm *y* ca o constantă $y = y_0$, adică

$$z = f(x, y_0) = f_1(x)$$

Funcția $z = f_1(x)$ defineşte curba L obținută prin intersecția suprafeței *S* cu planul $y = y_0$.

Reluăm interpretarea geometrică a derivatei ordinare:

$$f_1'(x_0) = tg\alpha$$

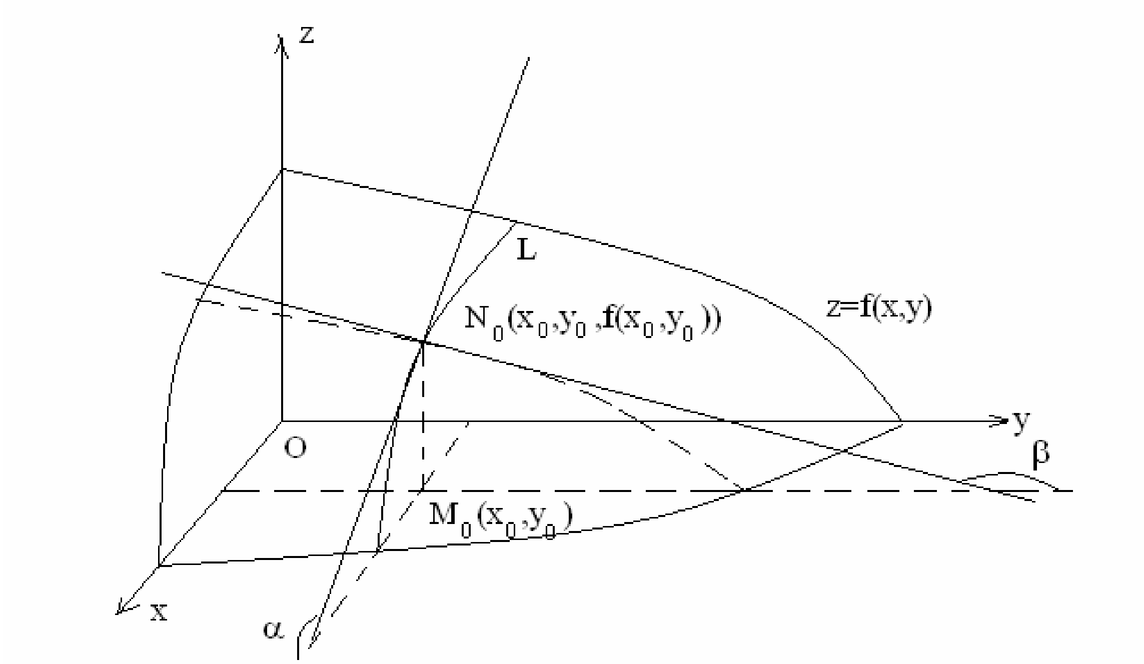


Figura 4.16

unde α este unghiul dintre axa x şi tangenta la curba L în punctul N_0. Deoarece,

$$f_1'(x_0) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$$

$$\Rightarrow \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} = tg\alpha$$

$\Rightarrow \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$ este panta tangentei în N_0 la curba formată prin intersecția planului $y = y_0$ cu suprafața $z = f(x, y)$.

Similar, $$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} = tg\beta$$

$\Rightarrow \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$ este panta tangentei în N_0 la curba formată prin intersecția planului $x = x_0$ cu suprafața $z = f(x, y)$.

4.4 Funcții diferențiabile

Fie $z = f(x,y)$ o funcție definită pe domeniul *D* din planul *xy* şi fie (x,y) un punct din *D*. Considerăm Δx şi Δy creşteri în x şi *y* astfel încât $(x+\Delta x, y+\Delta y) \in D$.

Definiție: Funcția $z = f(x,y)$ este *diferențiabilă* în $(x,y) \in D$ dacă creşterea totală

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

corespunzătoare creşterilor Δx şi Δy admite o reprezentare de forma

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y \qquad (1)$$

unde *A* şi *B* sunt independente de Δx şi Δy (dar depind în general de *x* şi *y*) şi $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ şi $\beta(\Delta x, \Delta y)$ tind la zero pentru $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

$A\Delta x + B\Delta y$, partea liniară relativ la Δx şi Δy a creşterei, se numeşte *diferențiala* lui $z = f(x,y)$ în punctul (x,y).

Notație:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y \qquad (2)$$

Atunci $\Delta z = dz + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$.

Exemplu: $z = x^2 + y^2$

Considerăm punctul (x,y) şi creşterile arbitrare Δx şi Δy.

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = (x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2 - x^2 - y^2$$

$$= 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x\Delta x + \Delta y\Delta y$$

Considerăm $A = 2x$, $B = 2y$, $\alpha(\Delta x, \Delta y) = \Delta x$ şi $\beta(\Delta x, \Delta y) = \Delta y$. $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Cu definiția, rezultă că funcția dată este diferențiabilă în orice punct (x,y) din planul xy şi $dz = 2x\Delta x + 2y\Delta y$.

Observație: Formula (1) poate fi rescrisă dacă utilizăm distanța dintre punctele (x,y) şi $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ adică

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \tag{3}$$

Atunci

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = \left(\alpha\frac{\Delta x}{\rho} + \beta\frac{\Delta y}{\rho}\right)\rho, \quad \rho \neq 0$$

Sau $$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = \varepsilon\rho$$

unde $\varepsilon = \alpha\frac{\Delta x}{\rho} + \beta\frac{\Delta y}{\rho}$ depinde de Δx şi Δy şi tinde la zero pentru $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ sau atunci când $\rho \to 0$.

Formula (1) care exprimă condiția ca funcția $z = f(x,y)$ să fie diferențiabilă devine

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon\rho \tag{4}$$

unde $\varepsilon = \varepsilon(\rho) \to 0$, pentru $\rho \to 0$.

Exemplu: $z = x^2 + y^2$

$$\begin{aligned}\Delta z &= 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \\ &= 2x\Delta x + 2y\Delta y + \rho\rho, \qquad \text{unde } \varepsilon(\rho) = \rho\end{aligned}$$

Condiții necesare pentru ca o funcție să fie diferențiabilă

Teorema 1: Dacă o funcție $z = f(x,y)$ este diferențiabilă într-un punct, atunci funcția este continuă în acel punct.

Demonstrație: Dacă $z = f(x,y)$ este diferențiabilă în (x,y) atunci creşterea funcției în (x,y) corespunzătoare creşterilor Δx şi Δy admite reprezentarea

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

unde A şi B sunt constante în (x, y) şi $\alpha \to 0$ şi $\beta \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Atunci

$$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \Delta z = 0 \quad \Rightarrow \text{ funcția } z = f(x, y) \text{ este continuă în } (x, y).$$

Teorema 2: Dacă o funcție $z = f(x, y)$ este diferențiabilă într-un punct, atunci funcția are derivate parțiale $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ în acel punct.

Demonstrație: Dacă $z = f(x, y)$ este diferențiabilă în (x, y) atunci creşterea funcției în (x, y) corespunzătoare creşterilor Δx şi Δy admite reprezentarea

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

Considerăm $\Delta x \neq 0$ şi $\Delta y = 0$. Atunci:

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\Delta x$$

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x, 0)$$

Deoarece *A* este independent de Δx şi $\alpha(\Delta x, 0) \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$, atunci:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A$$

Conform definiției, funcția $z = f(x, y)$ are derivată parțială în raport cu x în punctul (x, y) şi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A$$

Cu un raționament similar, se arată şi că funcția $z = f(x, y)$ are derivată parțială în raport cu y în punctul (x, y) şi

$$\frac{\partial z}{\partial y} = B$$

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \qquad (5)$$

Condiții suficiente pentru ca o funcție să fie diferențiabilă

Teorema 3: Fie $z = f(x, y)$ o funcție care are derivate parțiale f_x' şi f_y' într-o vecinătate a punctului (x_0, y_0) şi fie f_x' şi f_y' continue în (x_0, y_0). Atunci $z = f(x, y)$ este diferențiabilă în (x_0, y_0).

Exemplu: $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ definită peste tot.

Cu definiția derivatelor parțiale avem:

$$f_x'(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x \cdot 0} - 0}{\Delta x} = 0$$

$$f_y'(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt[3]{0 \cdot \Delta y} - 0}{\Delta y} = 0$$

Pentru a arăta că $f(x, y)$ este diferențiabilă sau nu în $O(0,0)$, calculăm creşterea lui $f(x, y)$ în $O(0,0)$.

$$\Delta f(0,0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \sqrt[3]{\Delta x \cdot \Delta y} = \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho$$

Deoarece,

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Atunci

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{\sqrt[3]{\Delta x \Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

Pentru ca funcția să fie diferențiabilă în origine $O(0,0)$ este necesar ca $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ să fie un infinitezimal pentru $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Considerând $\Delta y = \Delta x > 0$

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{(\Delta x)^{2/3}}{\sqrt{2}\Delta x}$$

Se observă că $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) \to \infty$, pentru $\Delta x \to 0$, astfel funcția $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ nu este diferențiabilă în $O(0,0)$, deşi funcția are derivate parțiale f_x' şi f_y' în $O(0,0)$. Acest rezultat este atribuit discontinuității derivatelor f_x' şi f_y' în $O(0,0)$.

Diferențiala totală

Dacă funcția $z = f(x, y)$ este diferențiabilă atunci diferențiala totală este

$$dz = A\Delta x + B\Delta y \tag{6}$$

Deoarece

$$A = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{şi} \quad B = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Atunci

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y \tag{7}$$

Considerăm diferențialele variabilelor independente egale cu creşterile respective

$$dx = \Delta x \quad \text{şi} \quad dy = \Delta y$$

Atunci diferențiala totală a funcției $z = f(x, y)$ se poate scrie:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{8}$$

Exemple:

1. Diferențiala funcției $z = x^2 + xy - y^2$ este

$$dz = (2x + y)dx + (x - 2y)dy$$

2. Diferențiala funcției $z = \ln(x + y^2)$ este

$$dz = \frac{1}{x + y^2}dx + \frac{2y}{x + y^2}dy$$

Dacă $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o funcție de n variabile independente, diferențiabilă, atunci

$$du = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}dx_k \ , \qquad dx_k = \Delta x_k \tag{9}$$

Presupunem că funcția $z = f(x, y)$ este diferențiabilă în punctul (x, y) şi că $dz \neq 0$ în (x, y). Atunci creşterea totală

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

diferă de partea liniară

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

doar prin suma $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$, în care $\alpha\Delta x$ şi $\beta\Delta y$ sunt infinitezimali de ordin mai mare decât termenii din diferențiala *dz* pentru $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

$$\Delta z \approx dz \tag{10}$$

Precizia de aproximare este mai bună cu cât valoarea absolută a creşterilor este mai mică.

4.5 Derivatele funcțiilor compuse

Fie $z = f(x, y)$ o funcție definită pe domeniul *D* din planul *xy* şi fie *x* şi *y* funcții de o variabilă *t* astfel încât

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in (t_0, t_1).$$

Presupunem că $\forall t \in (t_0, t_1)$ punctul corespunzător $(x, y) \in D$. In aceste condiții, substituția lui $x = \varphi(t)$ şi $y = \psi(t)$ reduce funcția $z = f(x, y)$ la o funcție compusă

$$z = f\left[\varphi(t), \psi(t)\right]$$

care este funcție de o singură variabilă *t*.

Teorema 1: Dacă într-un punct *t* există derivatele

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \quad \text{şi} \quad \frac{dy}{dt} = \psi'(t)$$

şi dacă funcția $z = f(x, y)$ este diferențiabilă în punctul (x, y) cu $x = \varphi(t)$ şi $y = \psi(t)$, atunci funcția compusă $z = f\left[\varphi(t), \psi(t)\right]$ are derivată $\frac{dz}{dt}$ în *t* şi

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

Exemplu: Calculați derivata funcției $z = x^2 + y^2$ unde $x = \sin t$ şi $y = t^3$

$$\frac{dz}{dt} = 2x \cdot \cos t + 2y \cdot 3t^2 = 2\sin t \cos t + 2t^3 3t^2 = \sin 2t + 6t^5$$

Considerăm o funcție $z = f(x, y)$ în care $y = \psi(x)$. Atunci z este o funcție compusă de x, $z = f(x, \psi(x))$ şi

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad (2)$$

unde $\frac{\partial z}{\partial x}$ este o derivată parțială a lui $z = f(x, y)$ în raport cu *x,* calculată considerând *y* constant. Derivata $\frac{dz}{dx}$ este derivata totală a lui $z = f(x, y)$ în raport cu variabila independentă *x*, calculată considerând *y* ca o funcție de x, adică $y = \psi(x)$.

Exemplu: Calculați $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{dz}{dx}$ pentru funcția

$$z = arctg\frac{y}{x} \quad \text{unde} \quad y = x^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(arctg\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} \cdot 2x$$

$$= -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} = -\frac{x^2}{x^2 + x^4} + \frac{2x^2}{x^2 + x^4} = \frac{1}{1 + x^2}$$

In continuare, ne ocupăm de derivarea unor funcții compuse de mai multe variabile.

Fie $z = f(x, y)$ cu $x = \varphi(\xi, \eta)$ şi $y = \psi(\xi, \eta)$. Atunci $z = f[\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)]$ este o funcție compusă de două variabile. Presupunem că există derivatele parțiale continue $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial x}{\partial \eta}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ într-un punct (ξ, η) şi presupunem că $f(x, y)$ este diferențiabilă în punctul corespunzător (x, y) cu $x = \varphi(\xi, \eta)$ şi $y = \psi(\xi, \eta)$.

Funcția compusă $z = z(\xi, \eta)$ are derivate parțiale $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ şi $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ în punctul (ξ, η).

Derivând z în raport cu ξ, variabila η este considerată constantă, adică x şi y devin funcții de o singură variabilă ξ, $x = \varphi(\xi, c)$ şi $y = \psi(\xi, c)$ şi formula (1) poate fi aplicată

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \qquad (3)$$

Exemplu: Calculați derivatele parțiale $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ şi $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ pentru funcția $z = x^2 y - xy^2$, unde $x = \xi\eta$ şi $y = \frac{\xi}{\eta}$.

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} = \left(2xy - y^2\right)\eta + \left(x^2 - 2xy\right)\frac{1}{\eta} = \left(2\xi\eta\frac{\xi}{\eta} - \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)\eta + \left(\xi^2\eta^2 - 2\xi\eta\frac{\xi}{\eta}\right)\frac{1}{\eta}$$

$$= \xi^2\left(\left(2 - \frac{1}{\eta^2}\right)\eta + \left(\eta^2 - 2\right)\frac{1}{\eta}\right) = \xi^2\left(3\eta - 3\frac{1}{\eta}\right) = 3\xi^2\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} = \left(2xy - y^2\right)\xi + \left(x^2 - 2xy\right) \cdot \left(-\frac{\xi}{\eta^2}\right)$$

$$= \left(2\xi\eta\frac{\xi}{\eta} - \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)\xi + \left(\xi^2\eta^2 - 2\xi\eta\frac{\xi}{\eta}\right) \cdot \left(-\frac{\xi}{\eta^2}\right) = \xi^3\left(1 + \frac{1}{\eta^2}\right)$$

Considerăm o funcție $u = f(x, y, z)$ unde $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ şi $z = z(\xi, \eta)$ atunci u este o funcție compusă de două variabile $u = u(\xi, \eta)$ şi

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta} \qquad (4)$$

Considerăm $u = f(x, y, z)$ cu $z = z(x, y)$. Atunci:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \qquad (5)$$

Observație: $\frac{\partial u}{\partial x}$ este o derivată parțială totală a lui *u* în raport cu variabila independentă *x*, iar $\frac{\partial f}{\partial x}$ este o derivată parțială a lui $u = f(x, y, z)$ în raport cu *x* calculată considerând *y* şi *z* constante.

Diferențialele funcțiilor compuse

Fie $z = f(x, y)$ o funcție diferențiabilă cu variabilele independente *x* şi *y*, atunci diferențiala totală *dz* a funcției *z* este:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \tag{6}$$

unde $dx = \Delta x$ şi $dy = \Delta y$.

Mai departe, presupunem că $z = f(x, y)$ este o funcție *compusă*, în care $x = \varphi(\xi, \eta)$ şi $y = \psi(\xi, \eta)$ şi aceste funcții au derivate parțiale continue $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial x}{\partial \eta}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ într-un punct (ξ, η). De asemenea presupunem că funcția *z* are derivate parțiale continue $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ în punctul (x, y) corespunzător lui (ξ, η), astfel încât $z = f(x, y)$ este diferențiabilă în (x, y).
Atunci funcția compusă $z = f[\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)]$ are în punctul (ξ, η) derivatele parțiale:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

Din aceste relații se observă că $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ şi $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ sunt continue în punctul (ξ, η). Atunci funcția compusă $z = f[\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)]$ este diferențiabilă în punctul (ξ, η) şi are loc:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta$$

În această relație substituim derivatele parțiale şi regrupăm termenii:

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) d\eta$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \right)$$

Prin ipoteză funcțiile $x = \varphi(\xi, \eta)$ şi $y = \psi(\xi, \eta)$ au derivate parțiale continue în punctul (ξ, η) şi deci sunt diferențiabile în punctul (ξ, η) şi are loc:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$$

Rezultă:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \qquad (7)$$

Comparând cu (6), concludem că diferențiala totală a funcției $z = f(x, y)$ este exprimată prin formule de aceeaşi formă, fie că variabilele sale sunt independnte fie că sunt funcții de alte variabile (invarianța formei diferențialei).

4.6 Derivarea funcțiilor implicite

Considerăm ecuația $F(x, y) = 0$, în care $F(x, y)$ este o funcție de două varibile definită pe un domeniu *D* din planul *xy*. Presupunem că această ecuație defineşte în mod implicit funcția de o singură variabilă $y = y(x)$. Forma explicită a acesteia se obține rezolvând ecuația dată în *y*.

Exemplu: Ecuația $y - x = 0$ defineşte în mod implicit funcția $y = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Următoarea teoremă furnizează condiții suficiente pentru ca ecuația $F(x,y)=0$ să fie rezolvabilă în y pe o vecinătate a unui punct dat x_0.

Teorema 1: Fie ecuația $F(x,y)=0$ şi fie îndeplinite condițiile:

i) Funcția $F(x,y)$ este definită şi continuă pe domeniul:

$$D:\begin{cases} x_0-\delta_1 < x < x_0+\delta_1 \\ y_0-\delta_2 < y < y_0+\delta_2 \end{cases}$$

unde $\delta_1>0$, $\delta_2>0$. Acesta fiind un dreptunghi cu centrul în (x_0,y_0).

ii) $F(x_0,y_0)=0$

iii) există derivatele parțiale continue $\frac{\partial F}{\partial x}$ şi $\frac{\partial F}{\partial y}$ pe D.

iv) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$

Atunci, $\forall\varepsilon>0$, suficient de mic, există o vecinătate $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$ a punctului x_0, pe care există o funcție continuă, unic definită, $y=f(x)$ astfel încât $y_0=f(x_0)$, $|y-y_0|<\varepsilon$ şi funcția verifică ecuația dată $F(x,f(x))=0$ pe vecinătatea lui x_0. Mai mult, funcția $y=f(x)$ este continuu diferențiabilă pe vecinătatea lui x_0 şi

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \qquad \text{unde } \frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$$

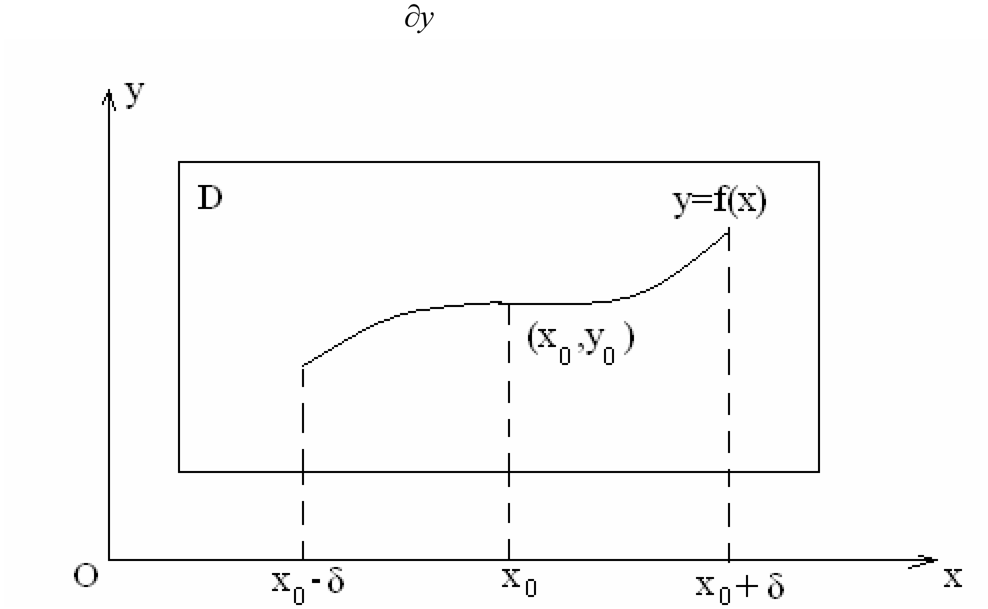


Figura 4.17

Exemplu: Calculați $\frac{dy}{dx}$ pentru funcția $y = f(x)$ definită implicit de ecuația $x^2 + y^2 - R^2 = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}, \quad y \neq 0$$

Similar teoremei precedente se poate formula o teoremă pentru funcția $z = f(x, y)$ definită implicit de ecuația $F(x, y, z) = 0$.

Teorema 2: Fie ecuația $F(x, y, z) = 0$ şi fie îndeplinite condițiile:

i) Funcția $F(x, y, z)$ este definită şi continuă pe domeniul:

$$D : \begin{cases} x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1 \\ y_0 - \delta_2 < y < y_0 + \delta_2 \\ z_0 - \delta_3 < z < z_0 + \delta_3 \end{cases}$$

unde $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$. Acesta fiind un paralelipiped dreptunghic cu centrul în (x_0, y_0, z_0).

ii) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$

iii) există derivatele parțiale continue $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ şi $\frac{\partial F}{\partial z}$ pe *D*.

iv) $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

Atunci, $\forall \varepsilon > 0$, suficient de mic, există o vecinătate Ω a punctului (x_0, y_0), pe care există o funcție continuă, unic definită, $z = f(x, y)$ astfel încât $z_0 = f(x_0, y_0)$, $|z - z_0| < \varepsilon$ şi funcția verifică ecuația dată $F(x, y, f(x, y)) = 0$ pe vecinătatea Ω. Mai mult, funcția $z = f(x, y)$ este derivate parțiale continue pe vecinătatea Ω şi formulele de calcul pentru derivatele parțiale ale funcției implicite sunt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$$

Exemplu: Calculați derivatele parțiale pentru funcția $z = f(x, y)$ definită implicit de ecuația $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z} \quad , \quad z \neq 0$$

4.7 Plane tangente şi drepte normale la o suprafață

Fie S o suprafață definită de ecuația $F(x, y, z) = 0$.

Definiții:

- □ Punctul $M(x, y, z)$ de pe suprafața S se numeşte punct *regulat* (*nesingular*) al suprafeței S dacă toate cele trei derivate parțiale $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ şi $\frac{\partial F}{\partial z}$ în M există şi sunt continue şi cel puțin una dintre ele este diferită de zero.
- □ Punctul $M(x, y, z)$ este *singular* dacă toate cele trei derivate parțiale $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ şi $\frac{\partial F}{\partial z}$ se anulează în M sau dacă cel puțin una dintre ele nu există în M.

Exemplu:

Considerăm un con circular definit de ecuația: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = -2z$$

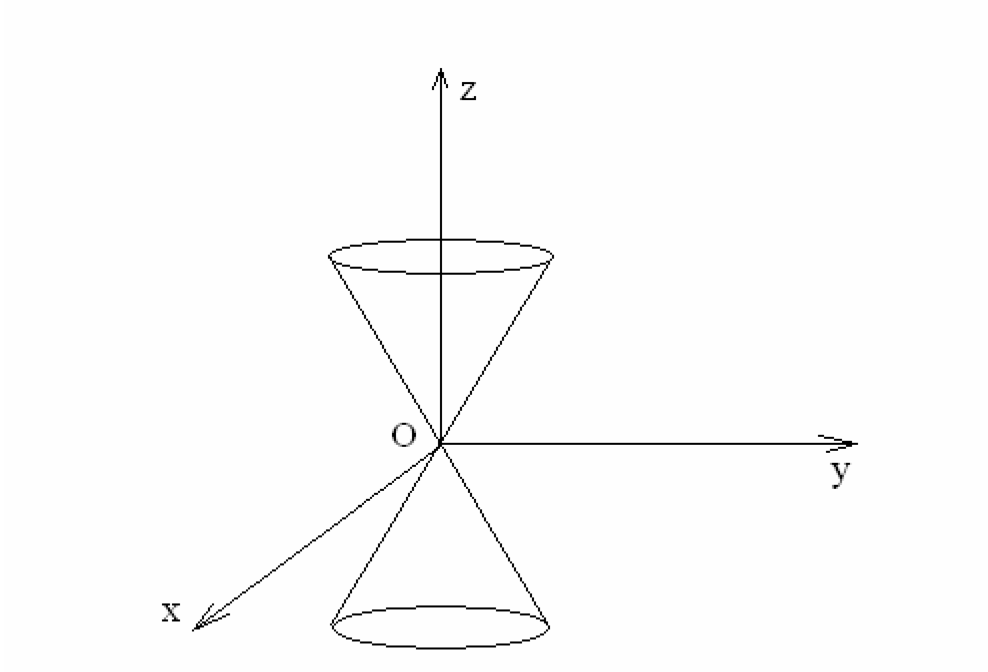


Figura 4.18

Singurul punct singular este originea O(*0,0,0*) în care toate cele trei derivate parţiale sunt nule.

Fie *L* o curbă în spaţiu definită de ecuaţiile parametrice:

$$L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t), \end{cases} \qquad t\in(\alpha,\beta)$$

Presupunem că $\varphi(t)$, $\psi(t)$ şi $\omega(t)$ au derivate continue care nu se anulează simultan pe (α,β) şi considerăm un punct nesingular $M_0(x_0,y_0,z_0)$ pe *L* definit de valoarea $t_0\in(\alpha,\beta)$. Atunci vectorul

$$\bar{\tau}=x'(t_0)\bar{i}+y'(t_0)\bar{j}+z'(t_0)\bar{k}$$

se află pe tangenta la curba *L* în punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Considerăm un punct nesingular *P* pe suprafaţa *S* şi ducem prin *P* o curbă *L* care aparţine suprafeţei *S*. Fie această curbă definită ca mai sus, de ecuaţiile parametrice

$$L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t), \end{cases} \qquad t\in(\alpha,\beta)$$

Presupunem că $\varphi(t)$, $\psi(t)$ şi $\omega(t)$ au derivate continue care nu se anulează simultan pe (α,β).

Definiție: Tangenta la *L* în punctul *P* se numeşte *tangentă la suprafața S în punctul P*.

Deoarece curba *L* se află pe suprafața *S*, ecuațiile parametrice ale curbei pot fi substituite în ecuația $F(x,y,z)=0$ a suprafeței *S*:

$$F(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))=0$$

Derivăm această ecuație ca o funcție compusă de variabila *t* şi obținem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0 \tag{1}$$

Această relație este un produs scalar de doi vectori:

$$\overline{n}=\frac{\partial F}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\overline{k}$$

$$\overline{\tau}=\frac{dx}{dt}\overline{i}+\frac{dy}{dt}\overline{j}+\frac{dz}{dt}\overline{k}$$

Vectorul $\overline{\tau}$ este vector tangent la curba *L* în punctul *P*. Vectorul $\overline{n}$ este independent de forma curbei ce trece prin punctul *P* şi depinde de coordonatele lui *P* şi de forma funcției $F(x,y,z)$ care defineşte suprafața.

Deoarece punctul *P* este nesingular, lungimea vectorului $\overline{n}$ este diferită de zero:

$$|\overline{n}|=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

Relație (*1*) implică $\overline{n}\cdot\overline{\tau}=0$, ceea ce înseamnă că vectorul $\overline{\tau}$ tangent la curba *L* în punctul *P* este perpendicular pe vectorul $\overline{n}$ în punctul *P*.

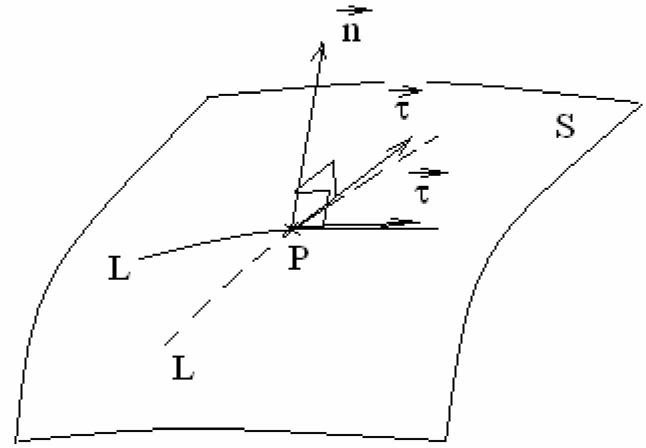


Figura 4.19

Acelaşi raţionament este aplicabil la orice curbă de pe suprafaţa *S* care trece prin punctul *P*. Astfel, orice tangentă la suprafaţa *S* în punctul *P* este perpendiculară pe vectorul $\bar{n}$ şi astfel toate aceste tangente se află într-un acelaşi plan perpendicular pe vectorul $\bar{n}$.

Definiţie: Planul format de toate tangentele la suprafaţa *S* într-un punct nesingular $P \in S$ se numeşte *plan tangent* la suprafaţă în punctul *P*.

Vectorul

$$\bar{n}\Big|_P = \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_P \bar{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_P \bar{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_P \bar{k}$$

Este un *vector normal* la planul tangent la suprafaţa $F(x, y, z) = 0$ în punctul *P*. *Ecuaţia planului tangent* la suprafaţa $F(x, y, z) = 0$ în punctul nesingular $P_0(x_0, y_0, z_0)$ este:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \cdot (z - z_0) = 0$$

Observaţie: Dacă suprafaţa *S* este definită explicit de funcţia $z = f(x, y)$, putem scrie:

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = -1$$

Atunci ecuația planului tangent la suprafața $z = f(x, y)$ în punctul nesingular $P_0(x_0, y_0, z_0)$ este:

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} \cdot (y - y_0)$$

Interpretarea geometrică a diferențialei totale

Considerăm $x - x_0 = \Delta x$ şi $y - y_0 = \Delta y$ în ecuația de mai sus şi obținem:

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} \cdot \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} \cdot \Delta y$$

Expresia din dreapta este diferențiala totală a funcției $z = f(x, y)$ în punctul $M_0(x_0, y_0)$ din planul *xy* adică $z - z_0 = dz$.
Atunci, diferențiala totală a funcției $z = f(x, y)$ în punctul $M_0(x_0, y_0)$ corespunzătoare creşterilor Δx şi Δy este egală cu creşterea $z - z_0$ a coordonatei *z* a planului tangent la suprafață în $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ obținută în deplasarea de la $M_0(x_0, y_0)$ la $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Definiție: Dreapta care trece prin punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al suprafeței $F(x, y, z) = 0$ perpendicular pe planul tangent la această suprafață în P_0 se numeşte *normala* la suprafață în P_0.

Vectorul:

$$\bar{n} = \frac{\partial F}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\bar{k}$$

este vectorul director al normalei, normală definită de ecuațiile:

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}}$$

Dacă suprafața S este definită de ecuația $z=f(x,y)$, atunci ecuațiile normalei în punctul $P_0(x_0,y_0,z_0)$ devine:

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}}=\frac{z-z_0}{-1}$$

Exemplu: Scrieți ecuațiile planului tangent și normalei la suprafața $z=\frac{x^2}{2}-y^2$ în punctul $M(2,-1,1)$.

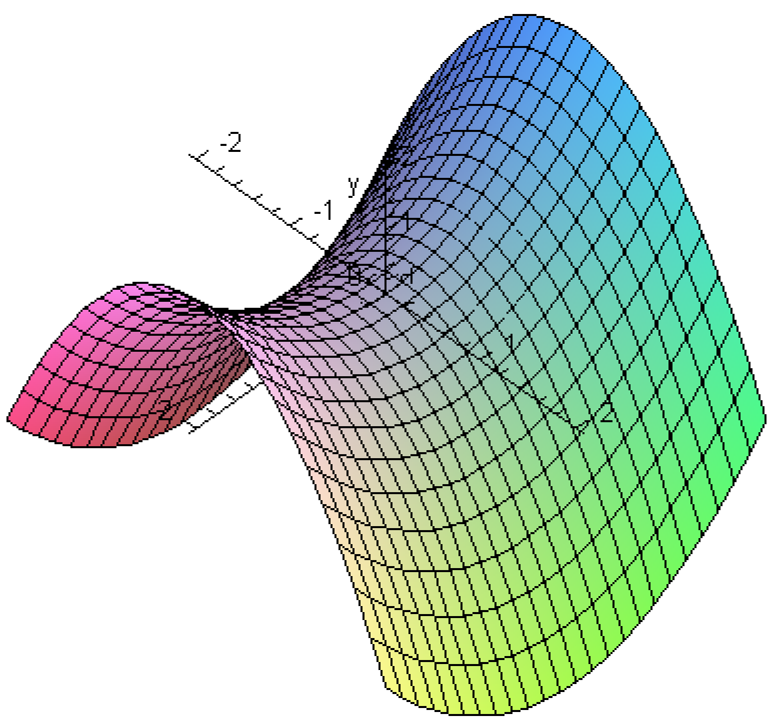


Figura 4.20 $z=\frac{x^2}{2}-y^2$

Ecuația planului tangent este:

$$z-1=x\Big|_{(2,-1)}\cdot(x-2)+(-2y)\Big|_{(2,-1)}\cdot(y+1)$$

$$z-1=2(x-2)+2(y+1)$$

Ecuațiile normalei sunt:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$$

4.8 Derivate de ordin superior

Fie $z=f(x,y)$ o funcție care are derivate parțiale $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ în fiecare punct dintr-un domeniu *D*. Aceste derivate

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y) \quad \text{şi} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$$

Sunt funcții de *x* şi *y* pe *D*. Aceste funcții pot avea la rândul lor derivate parțiale în anumite puncte din *D* sau pe tot domeniul *D*.

Definiție: Derivatele parțiale ale derivatelor parțiale $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ dacă există se numesc *derivate parțiale de ordinul doi* pentru funcția $z=f(x,y)$.

Fie $z=f(x,y)$ o funcție de două variabile, atunci putem scrie următoarele derivate parțiale de ordinul doi pentru aceasta:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=f''_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}$$

Derivatele f''_{xy} şi f''_{yx} se numesc derivate parțiale *mixte*. Prima dintre ele se calculează derivând funcția dată mai întâi în raport cu x şi apoi în raport cu y şi cea de-a doua derivată se calculează derivând funcția în raport cu y şi apoi cu x.

Observație: Derivatele parțiale de ordinul trei şi mai mult pot fi definite în mod similar.

Exemplu: Calculați derivatele parțiale de ordinul întâi şi doi ale funcției $z=x^3y^2-xy^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-y^3 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-3xy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3-6xy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=6x^2y-3y^2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=6x^2y-3y^2$$

Teoremă: Fie $z=f(x,y)$ o funcție care are derivate parțiale f'_x, f'_y, f''_{xy} şi f''_{yx} pe o vecinătate a punctului $M_0(x_0,y_0)$ şi fie f''_{xy} şi f''_{yx} continue în $M_0(x_0,y_0)$. Atunci, $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$ în $M_0(x_0,y_0)$.

Observație: Este important ca derivatele mixte f''_{xy} şi f''_{yx} să fie continue în $M_0(x_0,y_0)$.

Exemplu: Funcția:

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 \quad , & x=y=0 \end{cases}$$

are derivate parțiale mixte f''_{xy} şi f''_{yx} care nu sunt continue în $O(0,0)$, astfel $f''_{x,y}(0,0)=-1$ şi $f''_{yx}(0,0)=+1$.

Diferențiale de ordin superior

Fie $z = f(x, y)$ o funcție definită pe un domeniu *D*. Dacă $z = f(x, y)$ este diferențiabilă pe *D*, atunci diferențiala totală a funcției în punctul $(x, y) \in D$ corespunzătoare creşterilor *dx* şi *dy* a variabilelor *x* şi *y* este

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

În această relație $dx = \Delta x$ şi $dy = \Delta y$ sunt creşteri arbitrare ale variabilelor. Aceste creşteri pot fi păstrate constante şi atunci diferențiala totală este o funcție de *x* şi *y*, care poate fi la rândul său diferențiabilă.

Definiție: Diferențiala totală a diferențialei totale *dz* în punctul $(x, y) \in D$ corespunzătoare creşterilor *dx* şi *dy* a variabilelor independente se numeşte *diferențială secundă* sau *diferențială de ordinul doi* a funcției $z = f(x, y)$ şi se notează $d^2 z$. Astfel, conform definiției:

$$d^2 z = d\left(dz\right) \qquad (1)$$

Problemă: O formulă de calcul pentru această diferențială secundă.

Fie $z = f(x, y)$ o funcție cu derivate parțiale continue de ordinul întâi şi doi pe *D*. Atunci diferențiala totală *dz* a funcției $z = f(x, y)$ este diferențiabilă şi există $d^2 z$ pe *D*.
Folosind regulile de diferențiere, obținem:

$$d^2 z = d\left(dz\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)$$

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dy\right) dx + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy\right) dy$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(dx\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(dy\right)^2$$

Deoarece,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Obținem următoarea formulă:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \qquad (2)$$

unde $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$.

Formal putem rescrie formula (2) astfel:

$$d^2 z = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 z \qquad (3)$$

Exemplu: Calculați diferențialele de ordinul întâi şi doi ale funcției $z = 2x^2 - 3xy - y^2$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$dz = (4x - 3y) dx + (-3x - 2y) dy$$

$$d^2 z = 4dx^2 - 6dxdy - 2dy^2$$

Formulele pentru diferențialele de ordinul trei, patru se pot obține în mod asemănător, de exemplu $d^3 z = d\left(d^2 z\right)$. În general, diferențiala totală de ordinul *n, adică* $d^n z$, este diferențiala diferențialei de ordinul $n-1$:

$$d^n z = d\left(d^{n-1} z\right).$$

Dacă $z = f(x, y)$ este o funcție cu derivate parțiale continue până la ordinul *n* pe *D*, atunci există diferențiala totală $d^n z$ pe *D*, dată de formula:

$$d^n z = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^n z \qquad (4)$$

În general, diferențiala de ordinul n a unei funcții de m variabile $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ este:

$$d^n u = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^n u$$

Observație: Dacă x şi y nu sunt variabile independente, ci sunt funcții de alte variabile ξ şi η, atunci forma diferențialei secunde nu rămâne invariantă. Într-adevăr,

$$z = f(x, y) \quad \text{cu} \quad x = \varphi(\xi, \eta) \quad y = \psi(\xi, \eta)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

unde dx şi dy sunt funcții şi nu constante.

$$d^2 z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)$$

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx \right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y} dy \right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) dy + \frac{\partial z}{\partial x} d(dx) + \frac{\partial z}{\partial y} d(dy)$$

$$= \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 z + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y$$

4.9 Formula lui Taylor pentru funcții de mai multe variabile

Fie $z = f(x, y)$ o funcție cu derivate parțiale continue până la ordinul $n+1$ inclusiv, pe o vecinătate Ω a punctului (x_0, y_0). Pe vecinătatea Ω are loc formula Taylor:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \right] +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right]+\dots$$

$$+\frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0,y_0)+R_{n+1}(x,y)$$

unde restul în forma Lagrange este:

$$R_{n+1}(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$$

cu $\theta\in(0,1)$.

Caz particular:
Dacă în formula Taylor $x_0=y_0=0$, atunci aceasta se numeşte formulă Maclaurin şi arată astfel:

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)xy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2\right]+\dots$$

$$+\frac{1}{n!}\left[x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(0,0)+R_{n+1}(x,y)$$

unde restul în forma Lagrange este:

$$R_{n+1}(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(\theta\Delta x,\theta\Delta y) \qquad \text{cu } \theta\in(0,1).$$

Exemplu: Scrieți formula Maclaurin pentru funcția $f(x,y)=e^x\sin y$ până la termeni de ordinul doi.

$$f(0,0)=0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=e^x\sin y\Big|_{(0,0)}=0 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=e^x\cos y\Big|_{(0,0)}=1$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=e^x\sin y\Big|_{(0,0)}=0 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,0)}=-e^x\sin y\Big|_{(0,0)}=0$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=e^x\cos y\Big|_{(0,0)}=1$$

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y\right]+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)xy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2\right]+\dots$$

$$e^x\sin y=0+\frac{1}{1!}\left[0\cdot x+1\cdot y\right]+\frac{1}{2!}\left[0\cdot x^2+2\cdot 1\cdot xy+0\cdot y^2\right]+\dots$$

$$e^x\sin y=y+xy+\dots$$

4.10 Puncte de extrem pentru o funcție de mai multe variabile

Fie $z=f(x,y)$ o funcție definită pe un domeniu D şi fie $M_0(x_0,y_0)\in D$ punct interior.

Definiție: Dacă $\exists\delta>0$ astfel încât $\forall\Delta x,\Delta y$ cu $|\Delta x|<\delta$ şi $|\Delta y|<\delta$ să aibă loc:

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\le 0$$

atunci, $M_0(x_0,y_0)$ este un *maxim local* pentru $f(x,y)$.
Dacă $\forall\Delta x,\Delta y$ cu $|\Delta x|<\delta$ şi $|\Delta y|<\delta$ şi are loc:

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\ge 0$$

atunci, $M_0(x_0, y_0)$ este un *minim local* pentru $f(x, y)$.

Exemple:

1) $z = x^2 + y^2$ are în $O(0,0)$ punct de minim.

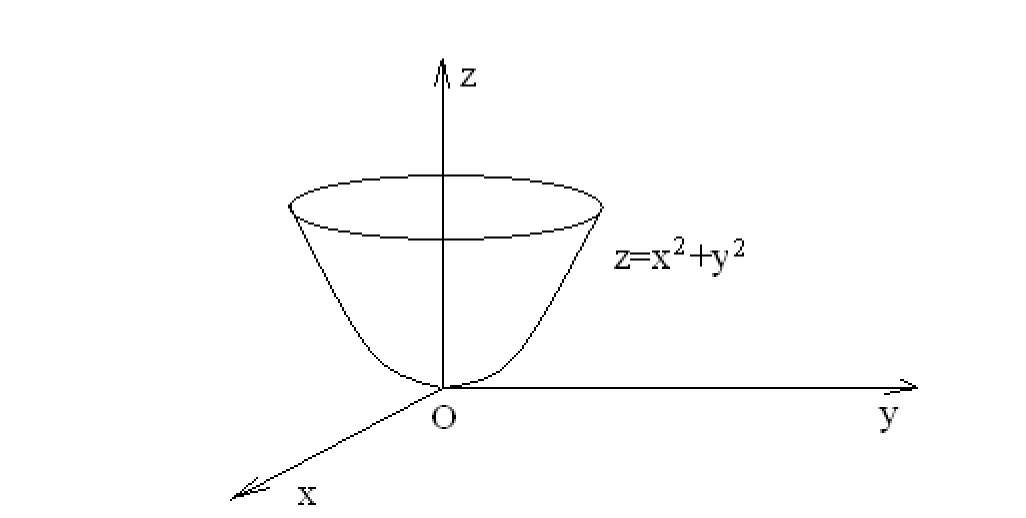


Figura 4.21

2) $z = 1 - x^2 - y^2$ are în $O(0,0)$ punct de maxim

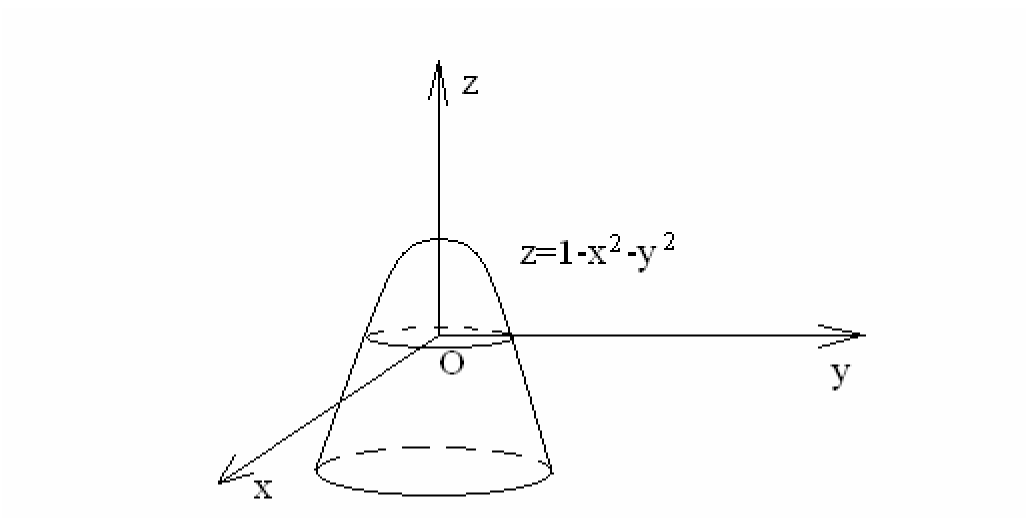


Figura 4.22

Teorema 1: (Condiții necesare de extrem) Dacă o funcție $z = f(x, y)$ are extrem într-un punct $M_0(x_0, y_0)$, atunci în acel punct fiecare derivată parțială $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ fie se anulează fie nu există.

Definiții: Punctele în care derivatele parțiale $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ se anulează sau nu există se numesc *puncte critice* pentru funcția $z = f(x, y)$.

Punctele în care derivatele parțiale $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ se anulează se numesc *puncte staționare*.

Observație: Teorema 1 ne dă numai condiții necesare de extrem. De exemplu, $z = x^2 - y^2$ are derivatele parțiale

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$

care sunt nule în punctul $O(0,0)$, dar funcția nu are extrem în origine.

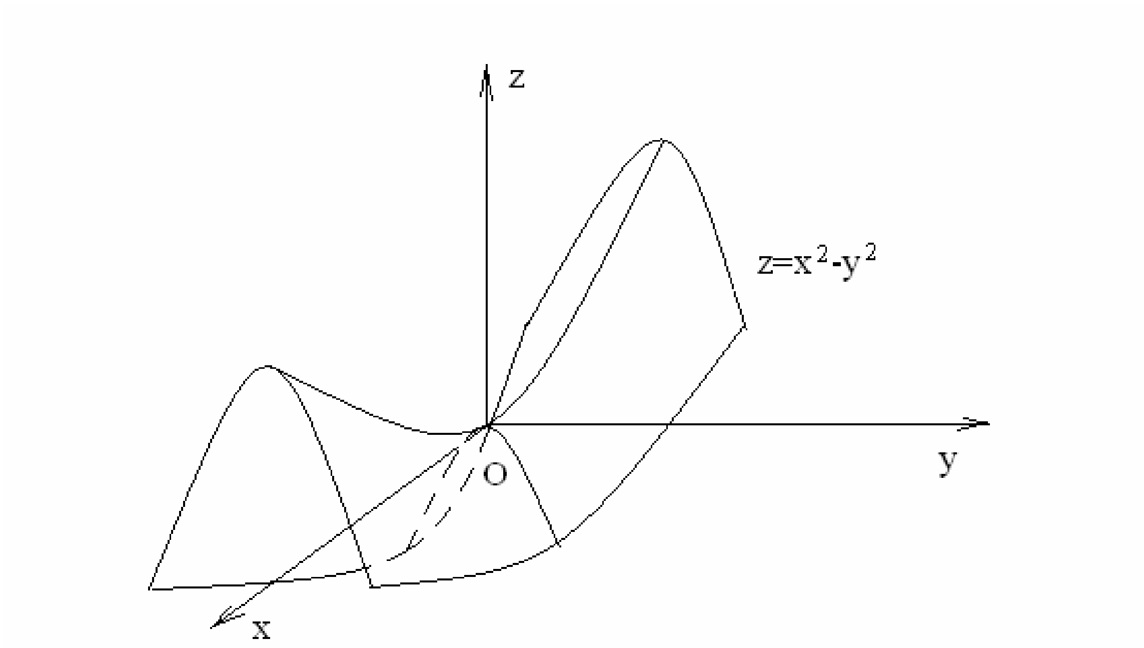


Figura 4.23

Punctul $O(0,0)$ este punct de minimax.

Teorema următoare furnizează condiții suficiente pentru extrem.

Teorema 2: Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct staționar pentru funcția $z = f(x, y)$, adică

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \qquad\qquad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Presupunem că pe o vecinătate a punctului $M_0(x_0, y_0)$ funcția $f(x, y)$ are derivate parțiale continue până la ordinul doi. Atunci:

i) Funcția $f(x, y)$ are un maxim în $M_0(x_0, y_0)$ dacă în acest punct determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

$$= f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - f''^{2}_{xy}(x_0, y_0) > 0$$

$$\text{şi} \quad f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \quad \text{şi} \quad f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$$

ii) Funcția $f(x, y)$ are un minim în $M_0(x_0, y_0)$ dacă în acest punct determinantul:

$$D = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - f''^{2}_{xy}(x_0, y_0) > 0$$

$$\text{şi} \quad f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \quad \text{şi} \quad f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$$

iii) Funcția $f(x, y)$ nu are un extrem în $M_0(x_0, y_0)$ dacă $D < 0$.

Dacă determinantul este nul, nu avem nici o concluzie.

Exemplu: Examinați pentru extrem funcția:

$$z = x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 6$$

Cap VII. Integrale multiple. Integrala dublă

7.1 Formularea problemei

Noțiunea de integrală dublă apare la calcularea volumului unui corp cilindric. Prin corp cilindric înțelegem un corp mărginit de planul xy, o suprafață $z = f(x, y)$ şi o suprafață cilindrică cu generatoarele paralele cu axa z.

Domeniul D din planul xy se numeşte *baza* corpului cilindric. Această bază este proiecția ortogonală a suprafeței $z = f(x, y)$ pe planul xy.

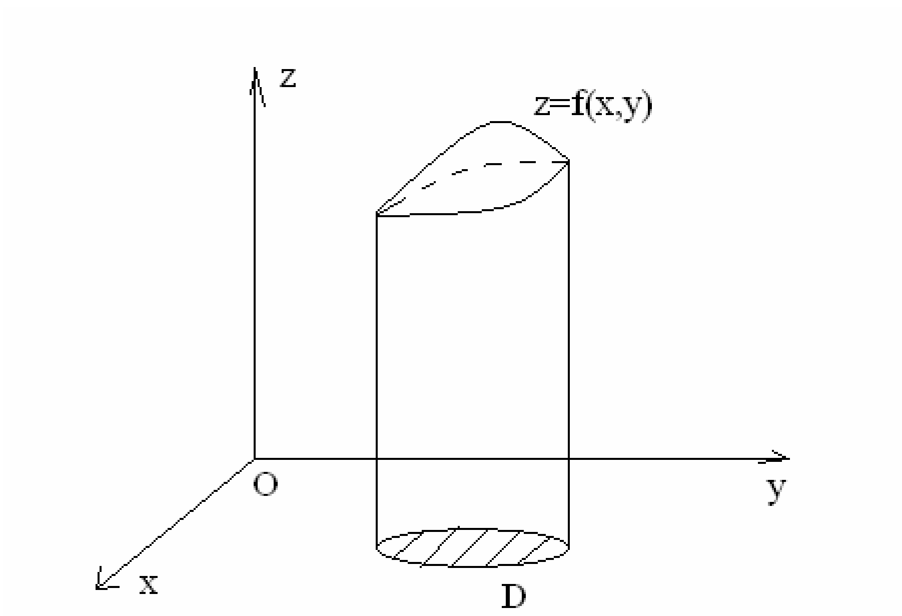


Figura 7.1

Pentru a calcula volumul vom respecta două principii:

- Dacă împărțim corpul în mai multe părți, volumul său va fi egal cu suma volumelor părților (aditivitate).
- Volumul unui cilindru drept, mărginit de planul $z = const$ paralel cu planul xy este egal cu aria bazei înmulțită cu înălțimea cilindrului.

În cele ce urmează presupunem că domeniul D, baza corpului cilindric, are arie şi este mărginit.

Fie $z = f(x, y)$ ecuația suprafeței care mărgineşte corpul cilindric şi fie $f(x, y)$ o funcție continuă în toate punctele $P(x, y) \in D$. Presupunem că suprafața se află deasupra planului xy, adică $f(x, y) \geq 0$ pe D. Notăm volumul corpului cilindric cu V.

Împărțim baza D a corpului cilindric în n domenii de formă arbitrară care nu se intersectează şi le vom numi *domenii parțiale*.
Notăm aceste domenii parțiale cu $D_1, D_2, \ldots, D_n$ şi ariile acestora cu $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$.

Numim *diametrul* unui domeniu parțial cantitatea:

$$diam\ D_k = \sup_{P,Q \in D_k} \rho(P,Q) \tag{1}$$

unde $\rho(P,Q)$ este distanța dintre punctele P şi Q. În cele ce urmează, notăm cu d cel mai mare dintre diametrele domeniilor parțiale D_k ($k = 1, \ldots, n$).

Prin frontiera fiecărui domeniu parțial vom construi o suprafață cilindrică cu generatoarele paralele cu axa z. Astfel, corpul cilindric va fi împărțit în n corpuri cilindrice parțiale.

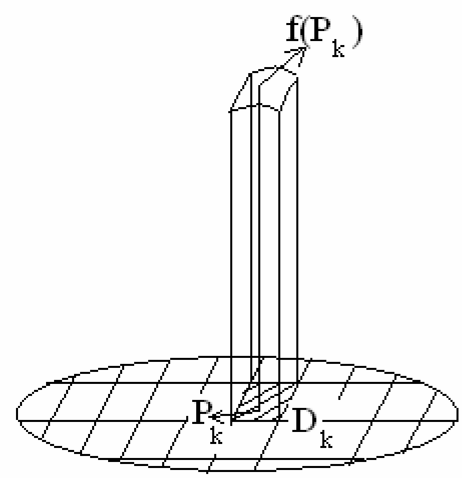


Figura 7.2

Vom înlocui al k-lea corp cilindric parțial cu un cilindru drept cu aceeaşi bază şi cu înălțimea egală cu coordonata z a unui punct oarecare de pe suprafața $z = f(x, y)$ ce urmează să fie înlocuită (vezi figura).

Volumul unui astfel de cilindru este:

$$\Delta V_k = f(P_k)\Delta S_k \tag{2}$$

unde punctul $P_k(x_k, y_k) \in D_k$ şi ΔS_k este aria lui D_k.

După ce supunem toate corpurile cilindrice parțiale la această procedură, vom obține un corp în trepte, a cărui volum este:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(P_k\right)\Delta S_k \tag{3}$$

Observație: Volumul V_n aproximează volumul V al corpului cilindric inițial cu o precizie cu atât mai bună cu cât sunt mai mici dimensiunile bazelor corpurilor cilindrice parțiale D_k.

Prin definiție, presupunem că V este limita la care tinde volumul (3) al corpului în trepte pentru $n \to \infty$, atunci când cel mai mare diametru d al domeniilor parțiale D_k tinde la zero. Această limită ar trebui să nu depindă de modul în care domeniul D a fost împărțit în domenii parțiale D_k şi de modul de alegere al punctelor P_k din D_k.

Suma (3) se numeşte *sumă integrală* pentru funcția $f\left(x, y\right)$ pe domeniul D pentru o diviziune dată a lui D în n domenii parțiale şi pentru o selecție dată a punctelor $P_k\left(x_k, y_k\right) \in D_k$. Facem pe $n \to \infty$, şi deci pe $d \to 0$. Suma (3) se va modifica.

Definiție: Dacă există limita sumelor integrale

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f\left(P_k\right)\Delta S_k \tag{4}$$

pentru $d \to 0$ astfel încât aceasta să nu depindă nici de diviziunea lui D în domenii parțiale, nici de alegerea punctelor P_k din D_k, atunci aceasta se numeşte *integrala dublă* a lui $f\left(P\right)$ sau $f\left(x, y\right)$ pe domeniul D şi se notează

$$\iint_D f\left(P\right)dS = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(P_k\right)\Delta S_k \tag{5}$$

Spunem că funcția $f\left(x, y\right)$ este integrabilă pe domeniul D.

Dacă ne întoarcem la definiția volumului corpului cilindric, putem concluziona că volumul corpului cilindric mărginit de planul xy, de suprafața $z = f\left(x, y\right)$, $f\left(x, y\right) \geq 0$ şi de o suprafață cilindrică cu generatoarele paralele cu axa z, este determinat de integrala dublă a lui $f\left(x, y\right)$ pe domeniul D, care este baza corpului cilindric:

$$V = \iint_D f\left(P\right)dS \qquad \text{sau} \qquad V = \iint_D f\left(x, y\right)dxdy \tag{6}$$

Aici $dxdy$ este elementul de suprafață în coordonate carteziene.

Observație: Dacă $f(P) \le 0$ pe *D*, atunci $V = -\iint\limits_D f(P)dS$.

Dacă $f(P)$ ia valori pozitive şi negative pe D, atunci integrala $\iint\limits_D f(P)dS$ este suma algebrică a volumelor acelor părți ale corpului care se află deasupra planului *xy* (cu semnul plus) şi acelor părți care se află sub planul *xy* (cu semnul minus).

Remarcă: Condiția ca $f(x,y)$ să fie mărginită pe *D* nu este suficientă pentru ca funcția să fie integrabilă.

Exemplu: Considerăm funcția $f(x,y)$ definită pe pătratul $D = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ astfel:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ daca } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0, \qquad\quad \text{in rest} \end{cases}$$

Această funcție este mărginită dar nu este integrabilă.

Teorema 1: O funcție $f(x,y)$ continuă pe un domeniu mărginit şi închis *D*, este integrabilă pe acest domeniu.

Această cerință de continuitate este destul de restrictivă.

Teorema 2: Dacă o funcție $f(x,y)$ este mărginită pe un domeniu mărginit şi închis *D* şi este continuă pe *D* cu excepția unor mulțimi cu arie nulă (ex: o curbă), atunci funcția este integrabilă pe acest domeniu.

7.2 Proprietățile integralei duble

- *Liniaritate* Dacă $f(P)$ şi $\varphi(P)$ sunt integrabile pe *D* şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha f(P) + \beta\varphi(P)$ este şi ea integrabilă pe *D* şi are loc

$$\iint\limits_D \left(\alpha f(P) + \beta\varphi(P)\right)dS = \alpha\iint\limits_D f(P)dS + \beta\iint\limits_D \varphi(P)dS \qquad (7)$$

- Dacă $f(P)$ şi $\varphi(P)$ sunt integrabile pe *D* şi dacă are loc $f(P) \le \varphi(P)$ pe *D*, atunci:

$$\iint_D f(P)\,dS \le \iint_D \varphi(P)\,dS \tag{8}$$

Adică, inegalitățile pot fi integrate termen cu termen.

$$\left|\iint_D f(P)\,dS\right| \le \iint_D |f(P)|\,dS \tag{9}$$

- *Aria unei regiuni plane* Aria domeniului *D* este egală cu integrala dublă pe acest domeniu a funcției constante egală cu unu.

  Într-adevăr, suma integrală pentru $f(P)=1$ pe *D* are forma:

  $$\sigma = \sum_{k=1}^{n} 1\cdot \Delta S_k$$

  Şi, pentru orice diviziune a lui *D* în D_k este egală cu aria *S*. Dar, cum limita acestei sume este integrala dublă,

  $$S = \iint_D dS \tag{10}$$

- *Estimarea integralei* Fie $f(P)$ o funcție continuă pe un domeniu mărginit şi închis D . Fie *M* şi *m* cea mai mare şi respectiv cea mai mică valoare a lui $f(P)$ pe *D*. Dacă *S* este aria domeniului *D*, atunci

  $$mS \le \iint_D f(P)\,dS \le MS \tag{11}$$

- *Aditivitate* Dacă o funcție $f(P)$ este integrabilă pe domeniul D şi dacă $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \phi$, atunci $f(P)$ este integrabilă pe fiecare domeniu D_1 şi D_2 şi are loc

  $$\iint_D f(P)\,dS = \iint_{D_1} f(P)\,dS + \iint_{D_2} f(P)\,dS \tag{12}$$

Teorema de medie: Dacă o funcție $f(P)$ este continuă pe un domeniu mărginit şi închis *D*, atunci există cel puțin un punct $P_m \in D$ astfel încât

$$\iint_D f(P)\,dS = f(P_m)\cdot S \tag{13}$$

unde *S* este aria lui *D*.

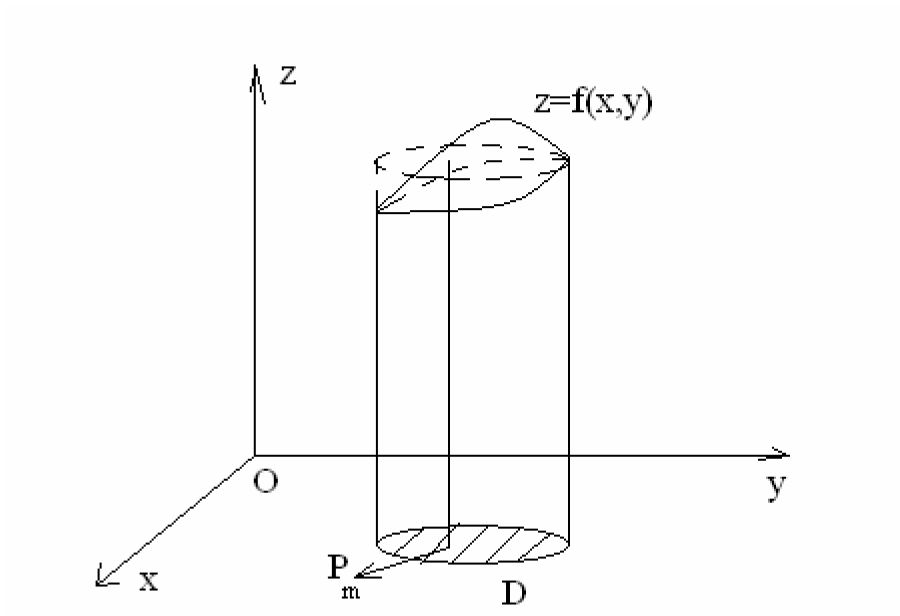


Figura 7.3

7.3 Integrala dublă ca o succesiune de integrale simple

I. Cazul domeniului dreptunghi.

Fie domeniul *D* un dreptunghi închis

$$\pi = \{(x, y) | a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

Presupunem funcția $z = f(x, y)$ continuă pe domeniul π. Integrala dublă:

$$\iint_{\pi} f(x, y)\, dxdy$$

poate fi interpretată ca volumul corpului cilindric cu baza π, mărginit superior de suprafața $z = f(x, y)$.

Considerăm corpul cilindric cu generatoarele paralele cu axa *Oz* şi suprafața superioară definită de funcția $z = f(x, y)$:

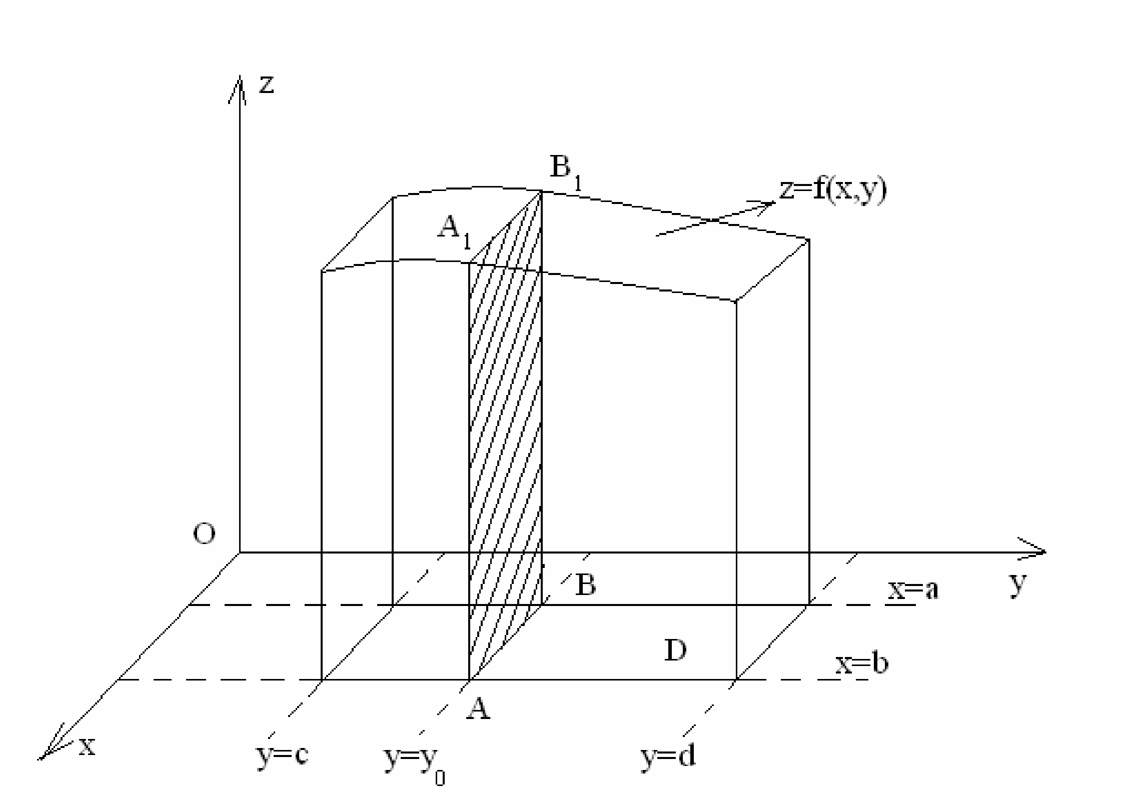


Figura 7.4

Planul $y = y_0$, perpendicular pe axa y, taie corpul cilindric după o secțiune ABB_1A_1 mărginită superior de curba A_1B_1, definită de ecuația $z = f\left(x, y_0\right)$. Aria acestei secțiuni este

$$\int_a^b f\left(x, y_0\right) dx \tag{14}$$

Integrarea se face în raport cu *x*, iar *y* este constant $y = y_0$.
Considerăm funcția de argument *y*:

$$S\left(y\right) = \int_a^b f\left(x, y\right) dx \tag{15}$$

care ne dă aria secțiunii în corpul cilindric dependentă de poziția planului secant.

Volumul corpului cilindric poate fi calculat

$$V = \int_c^d S\left(y\right) dy \tag{16}$$

sau poate fi exprimat ca o integrală dublă a lui $f\left(x, y\right)$ pe dreptunghiul π:

$$\iint_{\pi} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d S(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Sau altă scriere:

$$\iint_{\pi} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx \qquad (17)$$

Volumul corpului cilindric poate fi calculat şi cu ajutorul secțiunilor determinate de planele $x = x_0$

$$\iint_{\pi} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy \qquad (18)$$

Relațiile (17) şi (18) conțin două integrale simple succesive.

Observație: Ordinea de integrare nu contează.

Exemplu:
Calculați integrala dublă a lui $z = x^2 + y^2$ pe domeniul $\pi = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

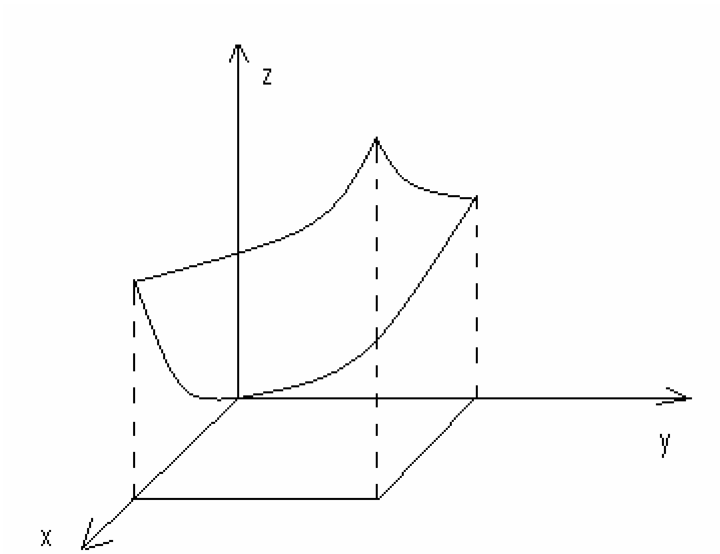


Figura 7.5

$$\iint_{\pi} (x^2 + y^2)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

II. Cazul unui domeniu arbitrar

Considerăm un domeniu de integrare *D*, mărginit şi închis, de formă arbitrară, în planul *xy*. Mai mult, presupunem că domeniul *D* îndeplineşte următoarea condiție: oricare dreaptă $x = ct \ \left(a \le x \le b\right)$, paralelă cu axa *Oy* intersectează frontiera lui *D* în nu mai mult de două puncte sau după un segment.

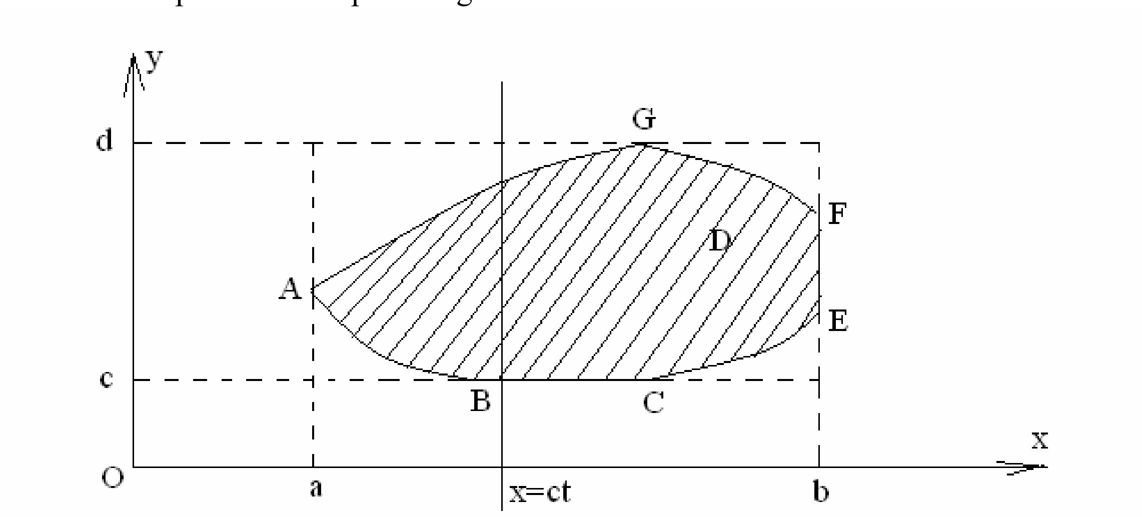


Figura 7.6

Domeniul oarecare *D* se poate încadra în dreptunghiul:

$$\pi = \left\{\left(x, y\right) \middle| a \le x \le b, c \le y \le d\right\}$$

Segmentul $\left[a,b\right]$ este proiecția ortogonală a domeniului *D* pe axa *Ox*, iar segmentul $\left[c,d\right]$ este proiecția ortogonală a domeniului *D* pe axa *Oy*.

Pentru analiza care urmează, considerăm un domeniu şi mai simplu:

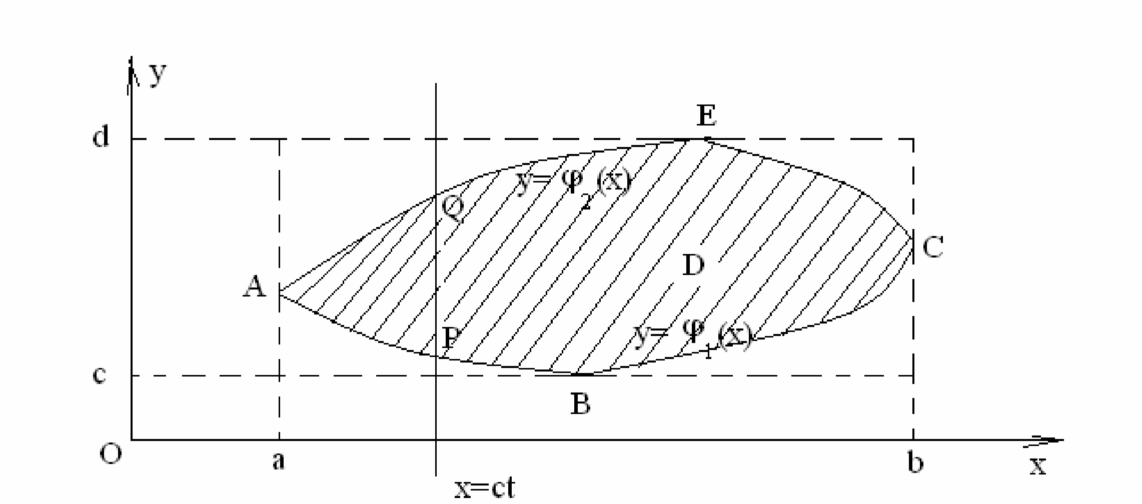


Figura 7.7

Punctele A şi C împart frontiera lui D în curbele ABC şi AEC. O dreaptă arbitrară, paralelă cu axa Oy, intersectează curbele ABC şi AEC în nu mai mult de un punct. Atunci ecuațiile care definesc aceste curbe pot fi scrise într-o formă rezolvată în y:

$$(ABC): y = \varphi_1(x)$$

$$(AEC): y = \varphi_2(x), \quad x \in [a,b]$$

Considerăm un corp cilindric a cărui bază este domeniul analizat mai sus. Suprafața superioară a corpului cilindric o considerăm definită de ecuația $z = f(x,y)$. Secționăm corpul cu un plan $x = ct$, $(a < x < b)$. Secțiunea rezultată notată $PQMN$, are aria dată de integrala funcției $f(x,y)$ privită ca o funcție de o singură variabilă y. Variabila y ia valori de la ordonata $\varphi_1(x)$ a punctului P până la ordonata $\varphi_2(x)$ a punctului Q.

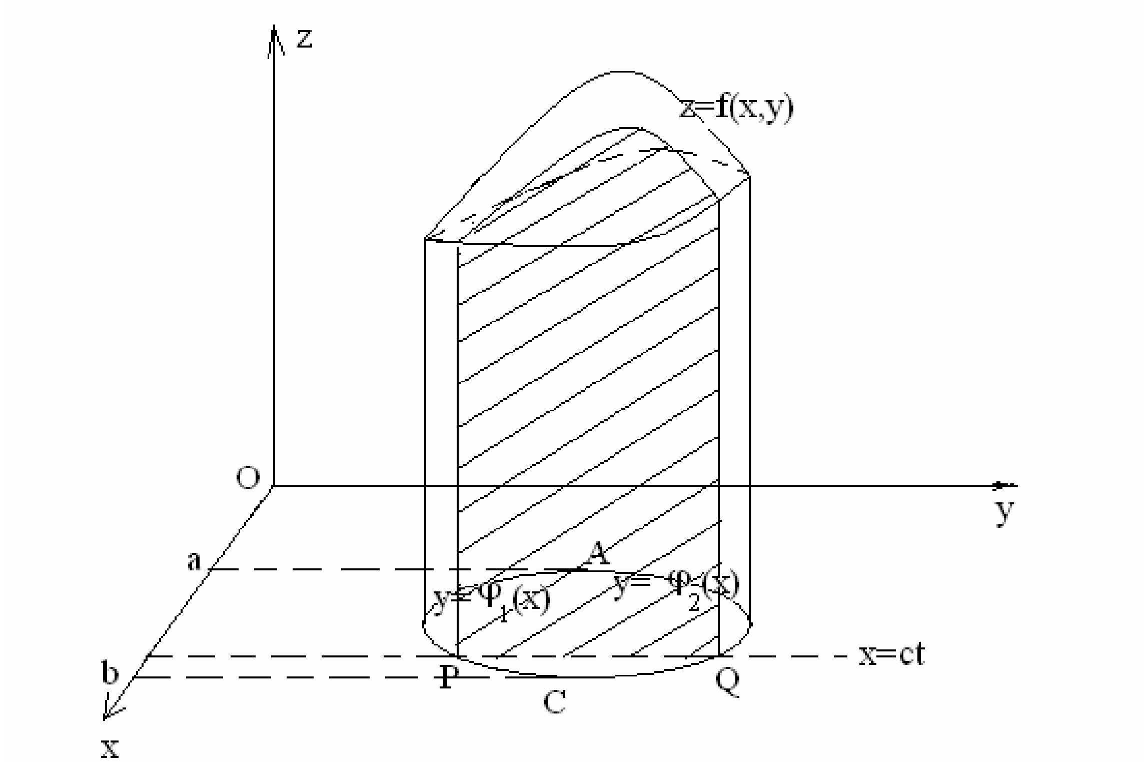


Figura 7.8

Punctul P este punctul de intrare în domeniul D al dreptei $x = ct$ din planul xy, iar Q este punctul de ieşire din domeniul D. In consecință, integrala

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy = S(x)$$

furnizează o expresie pentru aria secțiunii plane a corpului cilindric. Aceasta este o funcție de poziția planului secant $x = ct$. Volumul corpului va fi egal cu integrala acestei expresii în raport cu *x* pe domeniul $[a,b]$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \tag{19}$$

Caz particular: Aria *S* a domeniului *D*

$$S = \iint_D dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \tag{20}$$

Considerăm acum situația în care o dreaptă $y = ct$, $y \in [c,d]$ intersectează frontiera lui *D* în nu mai mult de două puncte *P*, *Q* cu abscisele $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ sau după un segment *MN*.

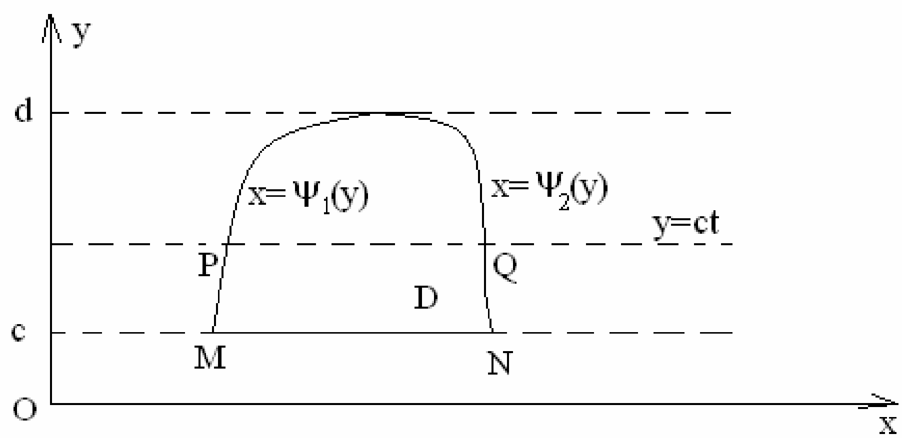


Figura 7.9

Argumente similare ne conduc la formula:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \tag{21}$$

care reduce şi ea, calculul integralei duble la o succesiune de integrale simple.

Exemplu: Calculați integrala dublă a funcției $f(x,y) = 2x - y + 3$ pe domeniul *D* mărginit de $y = x$ şi $y = x^2$.

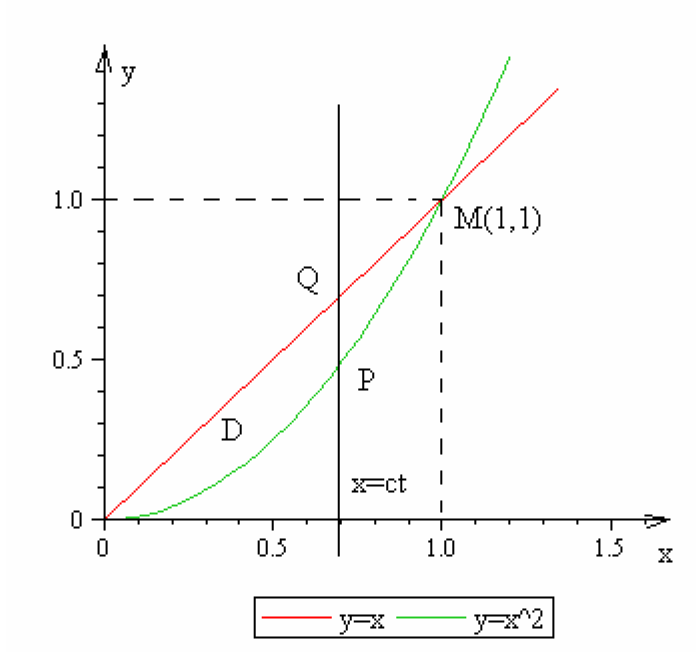


Figura 7.10

Dreapta $y = x$ şi parabola $y = x^2$ se intersectează în punctele $O(0,0)$ şi $M(1,1)$. Astfel, x variază de la *0* la *1* şi $\varphi_1(x) = x^2$ şi $\varphi_2(x) = x$. Cum orice dreaptă $x = \text{ct}$ $(0 \le x \le 1)$ intersectează frontiera lui D în nu mai mult de două puncte, putem aplica formula (19).

$$\iint_D (2x - y + 3)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (2x - y + 3)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(2xy - \frac{y^2}{2} + 3y \right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 \left(2x^2 - \frac{x^2}{2} + 3x - 2x^3 + \frac{x^4}{2} - 3x^2 \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(3x - \frac{3}{2}x^2 - 2x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(3\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}\frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{5}$$

Putem utiliza şi formula (21):

$$\iint_D (2x - y + 3)\,dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} (2x - y + 3)\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2\frac{x^2}{2} - yx + 3x \right)\Bigg|_{x=y}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \left(y - y\sqrt{y} + 3\sqrt{y} - y^2 + y^2 - 3y \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(3\sqrt{y} - 2y - y^{3/2}\right) dy = \left(3\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2\frac{y^2}{2} - \frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{5}$$

Exemplu:
Calculați volumul corpului mărginit de suprafața $z = 1 - 4x^2 - y^2$ şi de planul xy.

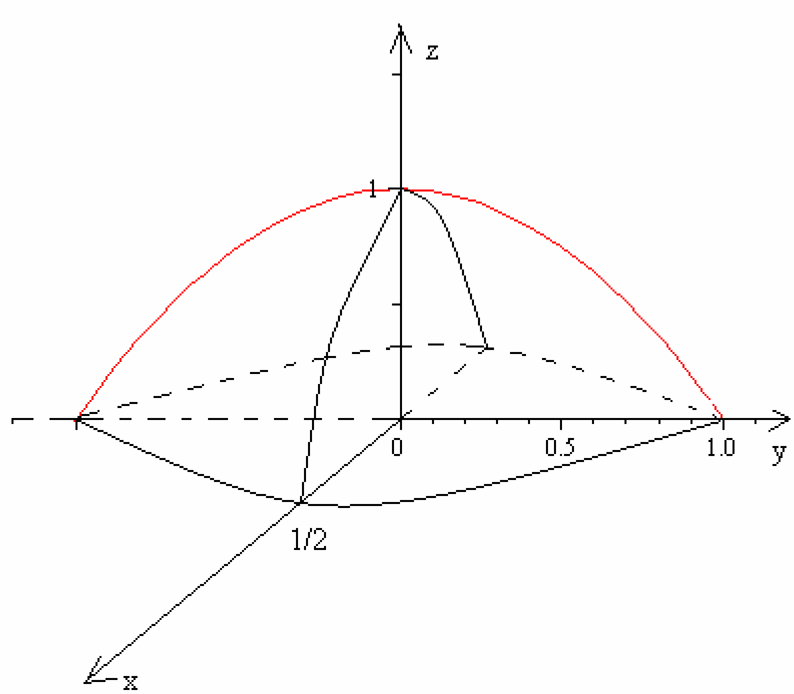


Figura 7.11

Paraboloidul eliptic $z = 1 - 4x^2 - y^2$ se intersectează cu planul xy de ecuație $z = 0$ de-a lungul curbei:

$$L: \begin{cases} z = 0 \\ \left(\frac{x}{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{1}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Această curbă este o elipsă cu semiaxele: $a = \frac{1}{2}$ şi $b = 1$.

Vezi curs :-)

7.4 Schimbarea de variabile în integrala dublă

Coordonate curbilinii Presupunem că pe domeniul D^*, din planul *uv*, sunt definite două funcții:

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases} \qquad (22)$$

continue şi cu derivate parțiale continue.
Cu funcțiile (22), fiecărui punct $M^*(u,v) \in D^*$ îi corespunde un punct $M(x,y)$ în planul *xy*, şi mulțimii D^*, îi corespunde o mulțime *D* de puncte în planul *xy*.

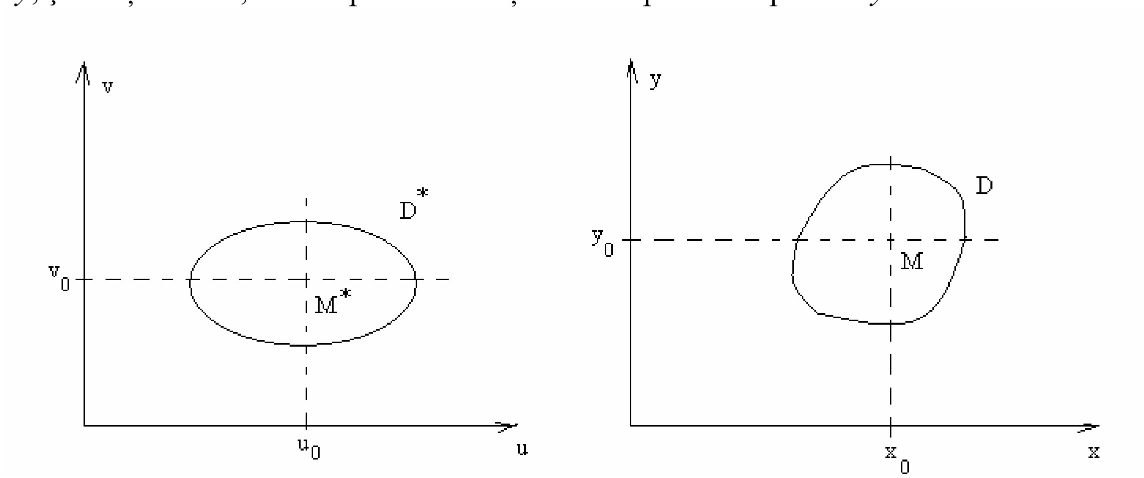


Figura 7.12

Spunem că funcțiile (22) transformă mulțimea D^* în *D***.** Presupunem că la puncte (u,v) diferite, le corespund puncte (x,y) diferite. Acest lucru este echivalent cu a spune că funcțiile (22) sunt rezolvabile în mod unic în *u* şi *v*:

$$\begin{cases} u = g(x,y) \\ v = h(x,y) \end{cases} \qquad (23)$$

In acest caz, are loc o transformare *unu-la-unu* a domeniilor *D* şi D^*. Atunci, orice curbă continuă $L^* \subset D^*$ se va transforma într-o curbă continuă $L \subset D$.

Dacă funcțiile $g(x,y)$ şi $h(x,y)$ sunt continue, atunci orice curbă continuă $L \subset D$ se va transforma într-o curbă continuă $L^* \subset D^*$.

Definiție: Deoarece cu o pereche de numere (u_0, v_0) dată pentru variabilele u şi v din D^*, putem determina în mod unic, nu numai poziția punctului $M^*(u_0, v_0)$ din D^*, dar şi poziția punctului corespunzător $M(x_0, y_0)$ din D întrucât $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$, putem considera numerele u şi v ca fiind noi coordonate ale lui M în planul xy. Acestea se numesc *coordonate curbilinii* ale punctului M.

Mulțimea de puncte din D astfel încât una dintre coordonate să rămână constantă se numeşte *linie de coordonate*. Considerăm în (22) $v = v_0$ şi obținem ecuațiile parametrice ale liniei de coordonate:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v_0) \\ y = \psi(u, v_0) \end{cases} \tag{24}$$

Aici, variabila u apare ca un parametru.
Dacă dăm lui v diverse valori posibile, vom obține o *familie de linii de coordonate* $v = ct$ în planul xy. În mod similar putem obține o familie de linii de coordonate $u = ct$.

Dacă corespondența dintre D^* şi D este *unu-la-unu*, atunci liniile de coordonate ale unei familii nu se intersectează, şi prin orice punct a lui D trece o singură linie din fiecare familie.

Observație: Rețeaua liniilor de coordonate curbilinii din planul xy este o reprezentare a rețelei dreptunghiulare din planul uv.

Elementul de arie în coordonate curbilinii. Jacobianul.
Într-un domeniu D^* din planul uv considerăm un mic dreptunghi $P_1^* P_2^* P_3^* P_4^*$ cu laturile paralele cu axele u şi v şi având lungimile Δu şi Δv respectiv.

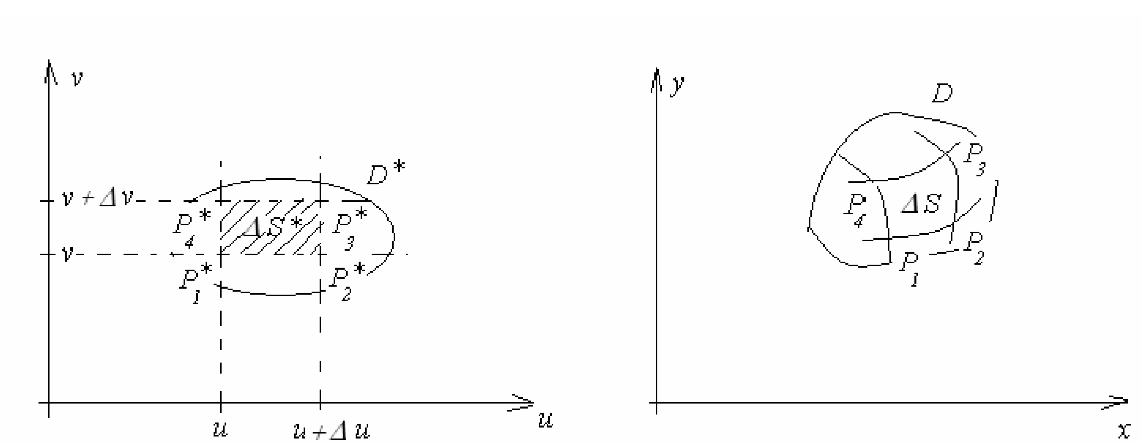


Figura 7.13

$$\Delta S^* = \Delta u \Delta v$$

Presupunem că $\Delta u > 0$ şi $\Delta v > 0$.
Dreptungiul $P_1^* P_2^* P_3^* P_4^*$ se transformă cu funcțiile

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$$

în patrulaterul curbiliniu $P_1P_2P_3P_4$ din *D*. Dacă punctele P_i^* $i = 1,2,3,4$ au coordonatele

$$P_1^*(u,v),\ P_2^*(u+\Delta u, v),\ P_3^*(u+\Delta u, v+\Delta v),\ P_4^*(u, v+\Delta v) \qquad (25)$$

atunci, prin transformările (1) punctele corespunzătoare acestora, vor avea coordonatele:

$$P_1\big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\big),\ P_2\big(\varphi(u+\Delta u,v),\psi(u+\Delta u,v)\big),$$
$$P_3\big(\varphi(u+\Delta u,v+\Delta v),\psi(u+\Delta u,v+\Delta v)\big),\ P_4\big(\varphi(u,v+\Delta v),\psi(u,v+\Delta v)\big) \quad (26)$$

Utilizăm formula Taylor pentru o funcție de două variabile şi păstrăm doar termenii de prim ordin în Δu şi Δv. Determinăm astfel, aproximativ, coordonatele punctelor P_1, P_2, P_3 şi P_4.

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot \Delta y + \dots$$

Astfel,

$$\begin{aligned}
&P_1(\varphi,\psi) \quad \text{valori exacte} \\
&P_2\left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u,\ \psi + \frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u\right) \\
&P_3\left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v,\ \psi + \frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v\right) \\
&P_4\left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v,\ \psi + \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v\right)
\end{aligned} \qquad (27)$$

unde φ, ψ şi toate derivatele acestora sunt calculate în punctul (u,v). Cu coordonatele aproximative (4), patrulaterul $P_1P_2P_3P_4$ este paralelogram. Într-adevăr,

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u\ \vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u\ \vec{j}$$

$$\overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{P_2P_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v\,\vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v\,\vec{j}$$

Putem exprima, aproximativ, aria ΔS a patrulaterului $P_1P_2P_3P_4$ prin mărimea produsului vectorial $\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_4}$, adică

$$\Delta S \simeq \left|\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_4}\right| = \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u & 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v & 0 \end{matrix}\right\|$$

$$= \left|\vec{k}\,\Delta u \Delta v \left|\begin{matrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{matrix}\right|\right| = \Delta u \Delta v \left\|\begin{matrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{matrix}\right\|$$

Definiție: Determinantul:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \psi(u,v)}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial v} & \frac{\partial \psi(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{28}$$

se numeşte *determinant funcțional* al funcțiilor $\varphi(u,v)$ şi $\psi(u,v)$ sau *Jacobian*.

$$\Delta S \approx |J|\Delta u \Delta v \tag{29}$$

Şi reprezintă elementul de arie în coordonate curbilinii. Deoarece

$$\begin{gathered} \Delta S^* = \Delta u \Delta v \\ \frac{\Delta S}{\Delta S^*} \approx |J| \end{gathered} \tag{30}$$

Această ultimă relație este aproximativă. La limită, totuşi, când diametrele elementelor ΔS^* şi ΔS tind la zero, aceasta devine exactă, adică

$$|J(u,v)| = \lim_{diam \Delta S^* \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta S^*} \tag{31}$$

Valoarea absolută a Jacobianului este un fel de coeficient local de extensie a domeniului D^* când este transformat în *D* cu funcțiile (22).

Schimbarea de variabile în integrala dublă.
Presupunem că două funcții continue cu derivate parțiale continue

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases} \tag{32}$$

efectuează o transformare *unu-la-unu* a domeniului D^* în *D***.** Considerăm că pe mulțimea *D* din planul *xy* este definită o funcție continuă $z = f(x,y)$. Iar pe D^* este definită funcția $z = F(u,v)$ astfel încât:

$$F(u,v) = f\left[\varphi(u,v),\psi(u,v)\right] \tag{33}$$

Considerăm sumele integrale pentru funcția *z* pe *D* şi D^*. Şi, uzând de faptul că sumele integrale se stabilesc într-o manieră arbitrară, le vom forma astfel încât ele să conțină valori egale ale funcției pe D şi D^*.

$$\sum_D f(x,y)\Delta S \approx \sum_{D^*} F(u,v)|J|\Delta S^* \tag{34}$$

unde $\Delta S \approx |J|\Delta S^*$ şi $J(u,v)$ este Jacobianul funcțiilor $\varphi(u,v)$ şi $\psi(u,v)$. Trecem la limită în relația (34) astfel încât cel mai mare diametru d^* al domeniilor parțiale D_k^* să tindă la zero. Atunci,

$$\iint_D f(x,y)dS = \iint_{D^*} F(u,v)|J(u,v)|dS^*$$

Sau

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f\left[\varphi(u,v),\psi(u,v)\right]|J(u,v)|dudv \tag{35}$$

unde

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{36}$$

Formula (35) se numeşte *formula Ostrogradsky* sau *transformarea de coordonate în integrala dublă.*

Observaţie: Atunci când $d^* \to 0$ şi cel mai mare diametru d al domeniilor parţiale din D va tinde şi el la zero, deoarece transformarea (32) este continuă.
Condiţia $J \neq 0$ presupune ca transformarea realizată de funcţiile $x = \varphi(u,v)$ şi $y = \psi(u,v)$ să fie o transformare *unu-la-unu* locală.

Teoremă: Pentru a transforma o integrală dublă definită în coordonate carteziene, într-o integrală dublă în coordonate curbilinii, trebuie să înlocuim în funcţia $f(x,y)$ variabilele x şi y cu $\varphi(u,v)$ şi $\psi(u,v)$, respectiv, şi elementul de arie $dxdy$ cu expresia sa în coordonate curbilinii $dxdy = |J|\,dudv$.

Exemplu:
Determinaţi aria figurii mărginite de hiperbolele $xy = a^2$, $xy = b^2$, unde $x > 0$, $y > 0$, $0 < a < b$ şi de dreptele $y = \alpha x$, $y = \beta x$ cu $0 < \alpha < \beta$.

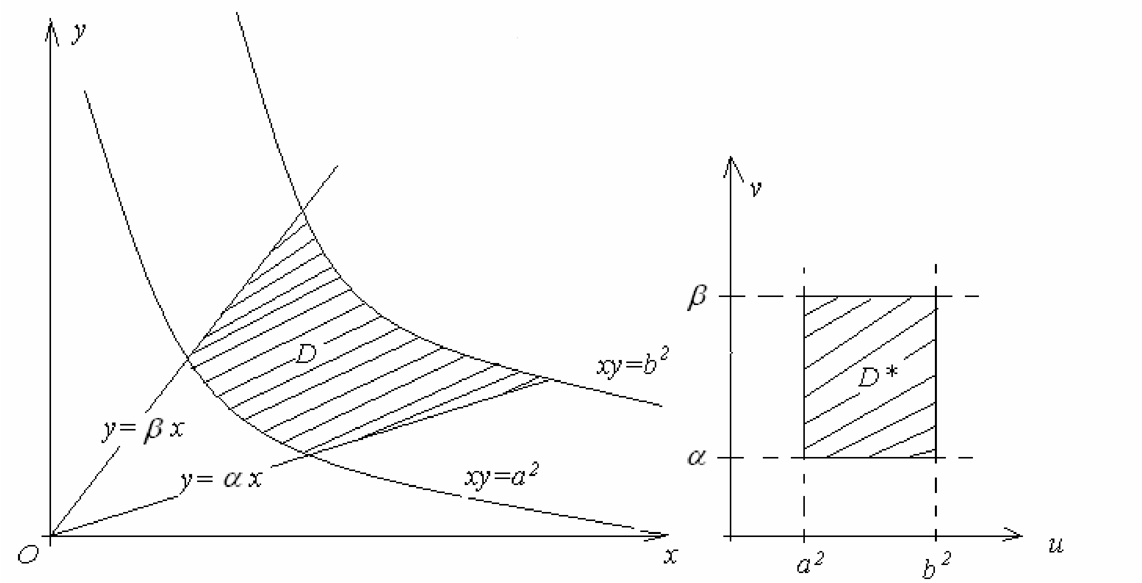


Figura 7.14

Determinarea ariei domeniului D se reduce la calcularea integralei duble:

$$\iint_D dxdy$$

Calcularea directă a acestei integrale este dificilă. Din acest motiv, folosim coordonate curbilinii u şi v astfel:

$$xy = u \qquad \text{şi} \qquad \frac{y}{x} = v$$

Alegerea este motivată de ipotezele: $a^2 \le u \le b^2$ şi $\alpha \le v \le \beta$. În planul uv domeniul va fi un dreptunghi:

$$D^* = \left\{(u,v) \middle| a^2 \le u \le b^2, \alpha \le v \le \beta\right\}$$

Exprimăm coordonatele x şi y în funcție de u şi v. Atunci,

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}} \qquad y = \sqrt{uv}$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$$

Cu formula (35) Ostrogradsky, obținem pentru $f(x,y) = 1$:

$$S = \iint_D dxdy = \iint_{D^*} |J|\, dudv = \int_{a^2}^{b^2} du \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dv}{2v} = u\Big|_{a^2}^{b^2} \cdot \frac{1}{2} \ln v\Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) \ln \frac{\beta}{\alpha}$$

Integrala dublă în coordonate polare

O integrală dublă este frecvent simplificată printr-o schimbare a coordonatelor carteziene x şi y în coordonate polare r şi φ cu formulele:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \text{ unde } r \in [0, +\infty), \ \varphi \in [0, 2\pi) \tag{37}$$

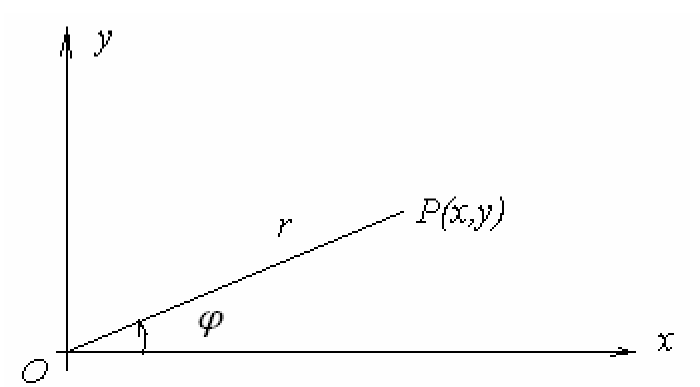


Figura 7.15

Jacobianul transformării este:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

Considerând $|J| = r$, putem scrie elementul de arie în coordonate polare:

$$dS = rdrd\varphi \tag{38}$$

Mai mult, formula de trecere a integralei duble din coordonate carteziene x şi y în coordonate polare r şi φ este:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdrd\varphi \tag{39}$$

Elementul de arie în coordonate polare pote fi obținut şi din argumente geometrice:

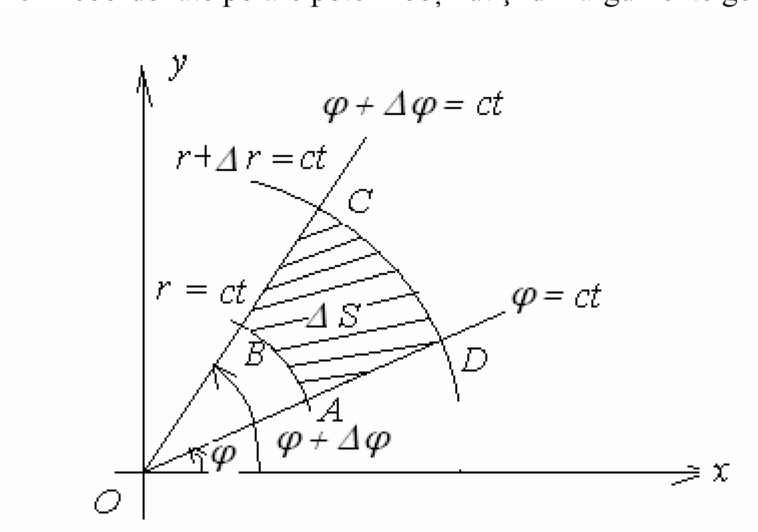


Figura 7.16

$$\Delta S = \text{aria } ODC - \text{aria } OAB$$

$$= \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\,\Delta\varphi - \frac{1}{2}r^2\Delta\varphi = r\Delta r\Delta\varphi + \frac{1}{2}(\Delta r)^2\,\Delta\varphi$$

Renunțând la al doilea termen, vom obține:

$$\Delta S \approx r\Delta r\Delta\varphi \quad \Rightarrow \qquad dS = rdrd\varphi$$

Rezumat: Pentru a transforma o integrală dublă definită în coordonate carteziene într-o integrală dublă în coordonate polare, trebuie să înlocuim argumentele funcției x şi y cu $r\cos\varphi$ şi $r\sin\varphi$ respectiv, şi să înlocuim elementul de arie în coordonate carteziene $dxdy$ cu elementul de arie în coordonate polare $rdrd\varphi$.

Calcularea integralei duble în coordonate polare ca o succesiune de integrale simple

I. *Originea sistemului de coordonate O se află în exteriorul domeniului de integrare D.*

Fie domeniul *D* astfel încât orice vector radial cu originea în *O*, adică o linie de coordonate $\varphi = ct$, să intersecteze frontiera lui *D* în nu mai mult de două puncte sau după un segment (*C* şi *E* în figura 7.17). Notăm valorile extreme ale unghiului polar cu φ_1 şi φ_2. Se observă că unghiul φ ia valori în intervalul $[\varphi_1, \varphi_2]$ pentru domeniul D din figură. Valorile φ_1 şi φ_2 vor fi limite de integrare. Vectorul radial $\varphi = \varphi_1$ trece prin punctul *A* al frontierei domeniului *D*, iar vectorul radial $\varphi = \varphi_2$ trece prin punctul *B*.

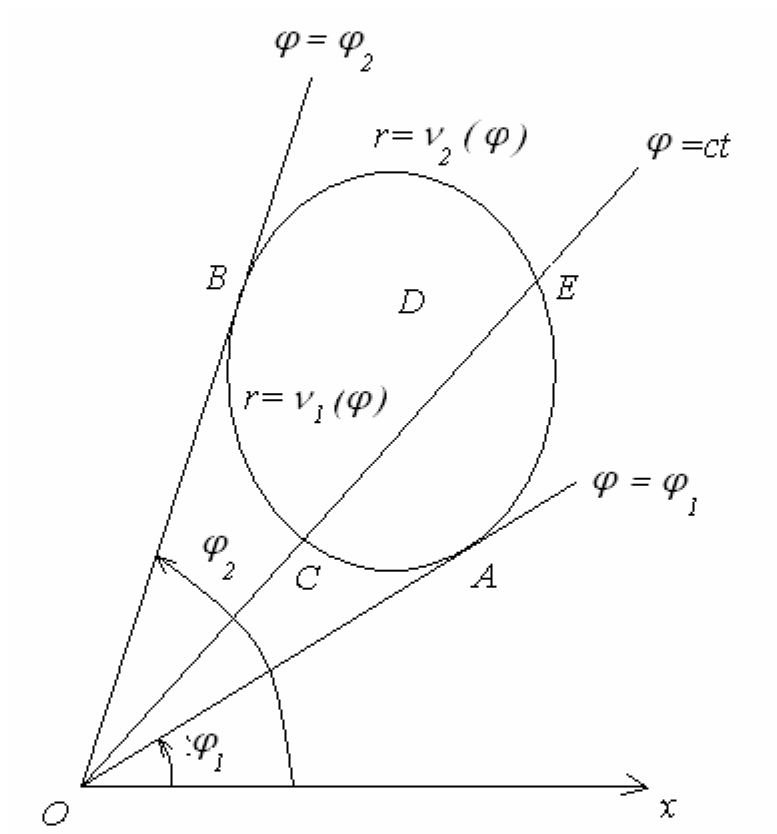


Figura 7.17

Punctele *A* şi *B* împart frontiera lui *D* în părţile *ACB* şi *AEB*. Ecuaţiile acestora în variabile polare sunt $r = v_1(\varphi)$ şi $r = v_2(\varphi)$ respectiv, unde $v_1(\varphi)$ şi $v_2(\varphi)$ sunt funcţii

univoce, continue care satisfac condiția $\nu_1(\varphi) \le \nu_2(\varphi)$, $\forall \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Funcțiile $\nu_1(\varphi)$ şi $\nu_2(\varphi)$ vor fi limite de integrare:

$$\iint_D F(r,\varphi) r dr d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\nu_1(\varphi)}^{\nu_2(\varphi)} F(r,\varphi) r dr \tag{40}$$

Caz particular:
Aria *S* a domeniului de integrare *D* se poate calcula considerând $F(r,\varphi) = 1$:

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\nu_1(\varphi)}^{\nu_2(\varphi)} r dr = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\nu_2^2(\varphi) - \nu_1^2(\varphi) \right] d\varphi \tag{41}$$

II. *Originea sistemului de coordonate O se află în interiorul domeniului de integrare D.*

Fie domeniul *D* un domeniu *stelar,* astfel încât orice vector radial cu originea în *O*, adică o linie de coordonate $\varphi = ct$, să intersecteze frontiera lui *D* într-un punct sau după un segment. Fie $r = \nu(\varphi)$ ecuația frontierei domeniului în coordonate polare. Atunci:

$$\iint_D F(r,\varphi) r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\nu(\varphi)} F(r,\varphi) r dr \tag{42}$$

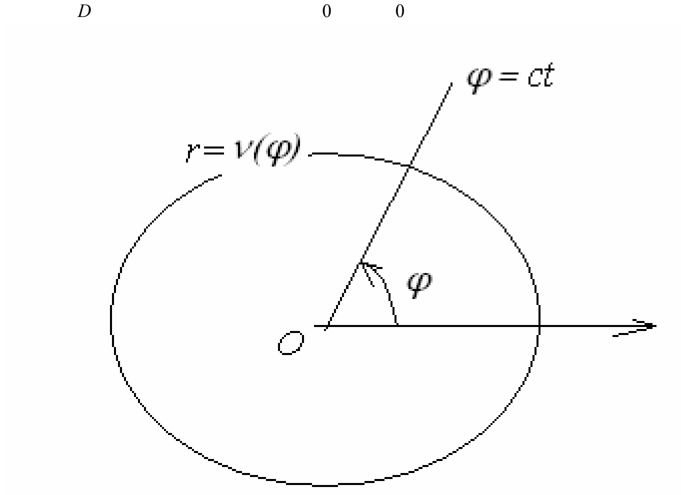


Figura 7.18

Exemplu:
Calculați integrala:

$$L = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} dx dy$$

Unde $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\right\}$ este un sfert din cercul unitate, adică primul cadran.

Trecem la coordonate polare:

$$x=r\cos\varphi \qquad\qquad y=r\sin\varphi$$

Atunci domeniul de integrare va fi un dreptunghi:

$$D^*=\left\{(r,\varphi)\middle|0\le r\le 1, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

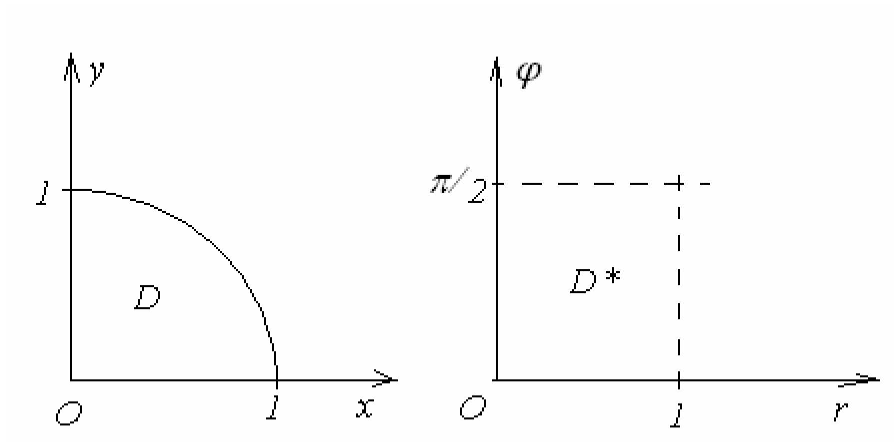


Figura 7.19

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy=\iint_{D^*}\frac{rdrd\varphi}{\sqrt{1+r^2}}=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1\frac{rdr}{\sqrt{1+r^2}}$$

$$=\varphi\Big|_0^{\pi/2}\cdot\sqrt{1+r^2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Calcularea ariei unei suprafețe. Considerăm o suprafață π care are proiecția pe planul *xy* domeniul *D*. Această suprafață este descrisă de ecuația $z = f(x, y)$.

Vom presupune suprafața *netedă*, adică pe *D* funcția $f(x, y)$ este continuă şi are derivate parțiale continue $f_x'(x, y)$ şi $f_y'(x, y)$.

Începem prin a defini aria unei suprafețe. Împărțim domeniul *D*, proiecția suprafeței pe planul *xy*, în domenii parțiale D_1, D_2, …, D_n. Aceste domenii parțiale nu au puncte interioare comune şi au ariile ΔS_1, ΔS_2, …, ΔS_n, respectiv. Fie *d* cel mai mare diametru al domeniilor parțiale D_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. În fiecare D_k, alegem în mod arbitrar un punct $P_k(\xi_k, \eta_k)$. Acestui punct îi corespunde un punct $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ pe suprafața π unde $\zeta_k = f(\xi_k, \eta_k)$.

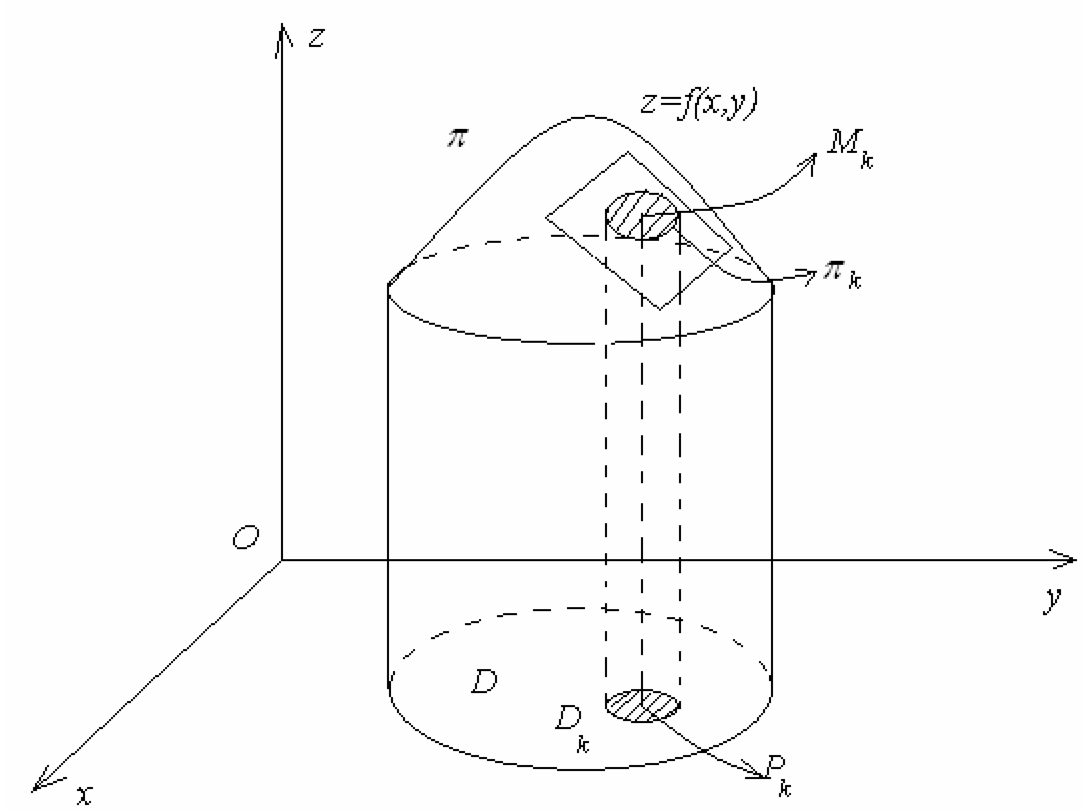


Figura 7.20

Construim un plan tangent la suprafața π în punctul M_k. Ecuația acestui plan este:

$$z - \zeta_k = f_x'(\xi_k, \eta_k)(x - \xi_k) + f_y'(\xi_k, \eta_k)(y - \eta_k) \tag{43}$$

Prin frontiera domeniului parțial D_k construim o suprafață cilindrică cu generatoarele paralele cu axa z. Această suprafață va intersecta planul tangent în M_k după drumul π_k care va fi frontiera unei suprafețe cu aria $\Delta\sigma_k$. Drumul π_k se proiectează pe planul xy în frontiera domeniului parțial D_k. Supunem toate domeniile parțiale D_k la aceeaşi procedură şi considerăm suma:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta\sigma_k \tag{44}$$

Definiție: Dacă suma (44) are limită pentru $d \to 0$, adică

$$\lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta\sigma_k = S \tag{45}$$

atunci S se numeşte *aria suprafeței* π. Aici d este cel mai mare dintre diametrele domeniilor parțiale D_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Vrem să găsim o *formulă* pentru a calcula aria unei suprafețe.
Se ştie că aria proiecției unei figuri plane pe un plan este egală cu produsul dintre aria figurii care se proiectează şi cosinusul unghiului ascuțit dintre planul de proiecție şi planul în care se află figura. Notăm cu γ_k unghiul dintre planul tangent la suprafața π în M_k şi planul xy.

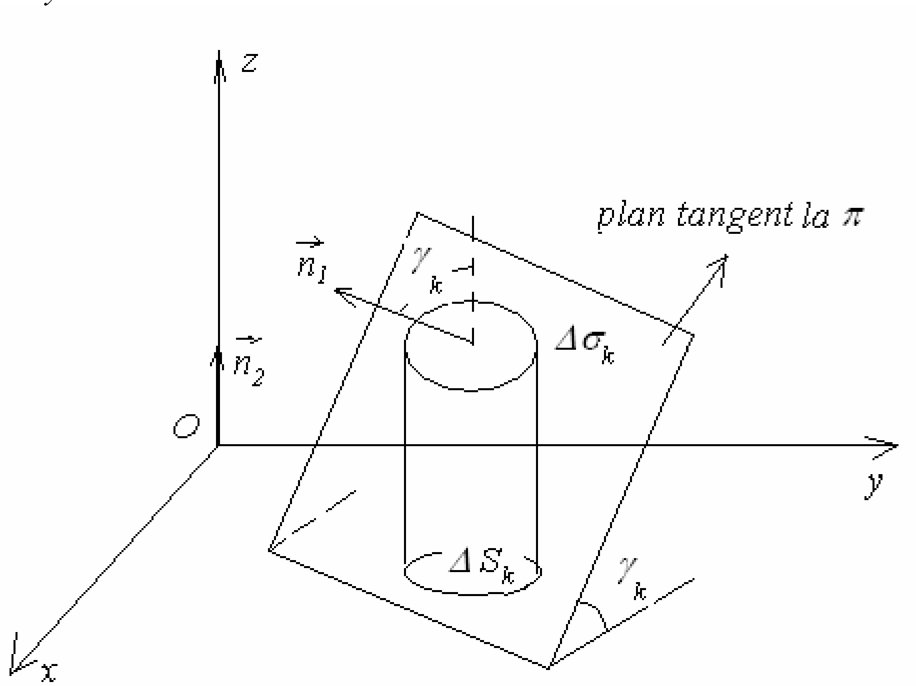


Figura 7.21

$$\Delta S_k = \Delta\sigma_k \left|\cos\gamma_k\right| \tag{46}$$

$$\Delta\sigma_k = \frac{\Delta S_k}{|\cos\gamma_k|} \tag{47}$$

Unghiul γ_k este şi unghiul dintre axa z şi normala la planul tangent la suprafaţa π în M_k. Vom nota normala la planul tangent la suprafaţa π în M_k :

$$\vec{n}_1 = f_x'(\xi_k,\eta_k)\vec{i} + f_y'(\xi_k,\eta_k)\vec{j} - \vec{k} \tag{48}$$

Şi vectorul unitate pe axa z:

$$\vec{n}_2 = \vec{k} \tag{49}$$

$$|\cos\gamma_k| = \frac{|(\vec{n}_1,\vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{1+\left[f_x'(\xi_k,\eta_k)\right]^2+\left[f_y'(\xi_k,\eta_k)\right]^2}} \tag{50}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta\sigma_k = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left[f_x'(\xi_k,\eta_k)\right]^2+\left[f_y'(\xi_k,\eta_k)\right]^2}\,\Delta S_k \tag{51}$$

Prin ipoteză $f_x'(x,y)$ şi $f_y'(x,y)$ sunt continue pe D , şi atunci funcţia:

$$\sqrt{1+\left[f_x'(x,y)\right]^2+\left[f_y'(x,y)\right]^2}$$

este integrabilă pe D. Pentru $d\to 0$ suma (3.51) are limită finită:

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta\sigma_k = \iint_D \sqrt{1+\left[f_x'(x,y)\right]^2+\left[f_y'(x,y)\right]^2}\,dS \tag{52}$$

Cu relaţia (45) care defineşte aria S a suprafeţei π, obţinem:

$$S = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy \tag{53}$$

unde D_{xy} este proiecţia suprafeţei π pe planul xy.

Definiție: Expresia

$$d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy \tag{54}$$

se numeşte *element de suprafață*.

Dacă proiecția suprafeței π se face pe planul *xz*, atunci obținem:

$$S = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz \tag{55}$$

unde D_{xz} este proiecția suprafeței π pe planul *xz*.
Dacă proiecția suprafeței π se face pe planul *yz*, atunci obținem:

$$S = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz \tag{56}$$

unde D_{yz} este proiecția suprafeței π pe planul *yz*.

Exemplu:
Determinați aria suprafeței unei sfere cu raza *R*, centrul în originea sistemului de coordonate şi ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

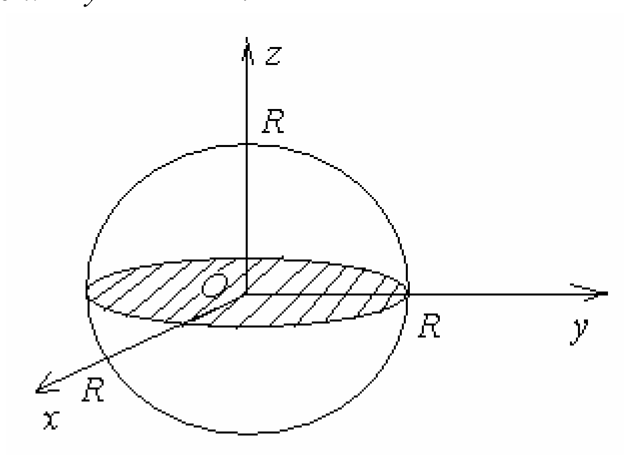


Figura 7.22

Ecuația semisferei superioare este:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy$$

$$d\sigma = \frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

Domeniul de integrare este discul circular $x^2 + y^2 \le R^2$

$$S = 2\iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$

Datorită simetriei, transformăm integrala în coordonate polare:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad J = r$$

$$S = 2R\iint_{D^*} \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 4\pi R\left(-\sqrt{R^2 - r^2}\right)\Bigg|_0^R = 4\pi R^2$$

Formule utile:

- Elementul de suprafață al suprafeței cilindrice cu raza *R* este:

$$d\sigma = R\ d\varphi\ dz \tag{57}$$

- Elementul de suprafață al suprafeței sferice cu raza *R* este:

$$d\sigma = R^2 \sin\theta\ d\theta\ d\varphi \tag{58}$$

Folosind formula (58) pentru elementul de suprafață al unei suprafețe sferice, putem calcula aria sferei:

$$S = 2\iint_\pi R^2 \sin\theta\ d\theta\ d\varphi = 2R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = 2R^2 2\pi\left(-\cos\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 4\pi R^2$$

Integrala de suprafaţă

Considerăm o funcţie continuă $f(M)$ definită pe o suprafaţă netedă π. Împărţim suprafaţa π în suprafeţele parţiale π_1, π_2, …, π_n cu ariile $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, …, $\Delta\sigma_n$, respectiv. În fiecare suprafaţă parţială considerăm câte un punct arbitrar M_1, M_2, …, M_n şi construim suma

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\sigma_k \tag{59}$$

sumă ce o numim *sumă integrală* pentru $f(M)$ pe suprafaţa π.

Definiţie: Dacă cel mai mare diametru *d* al suprafeţelor parţiale π_k tinde la zero şi suma (59) are limită finită independentă de modul de împărţire al lui π în suprafeţe parţiale şi de alegerea punctelor M_k, atunci această limită se numeşte *integrala lui* $f(M)$ *pe suprafaţa* π (integrala de suprafaţă de primul tip) şi se notează:

$$\iint_{\pi} f(M)\,d\sigma \text{ sau } \iint_{\pi} f(x,y,z)\,d\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\sigma_k \tag{60}$$

Observaţie: Proprietăţile integralei duble rămân valabile şi la integrala de suprafaţă.

Teoremă: Dacă π este o suprafaţă netedă definită de ecuaţia $z=\varphi(x,y)$ şi $\varphi(x,y)$ are derivate parţiale continue pe domeniul *D* mărginit şi închis şi dacă $f(x,y,z)$ este o funcţie continuă definită pe π, atunci are loc:

$$\iint_{\pi} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{D} f\left(x,y,\varphi(x,y)\right)\sqrt{1+\left(\varphi_x'\right)^2+\left(\varphi_y'\right)^2}\,dxdy \tag{61}$$

Integrala de suprafaţă din stânga există dacă există integrala dublă din dreapta. *D* este proiecţia suprafeţei π pe planul *xy*.

Observaţie: Integrala $\iint_{\pi}\mu(P)\,d\sigma$, cu $\mu(P)\geq 0$ pe π poate fi interpretată ca masa *m* a stratului reprezentat de suprafaţa π, pe care masa este distribuită cu densitatea de suprafaţă $\mu=\mu(P)$.

Exemplu:
Determinați masa stratului parabolic:

$$z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) \qquad 0 \le z \le 1$$

a cărui densitate variază în acord cu funcția $\mu = z$.

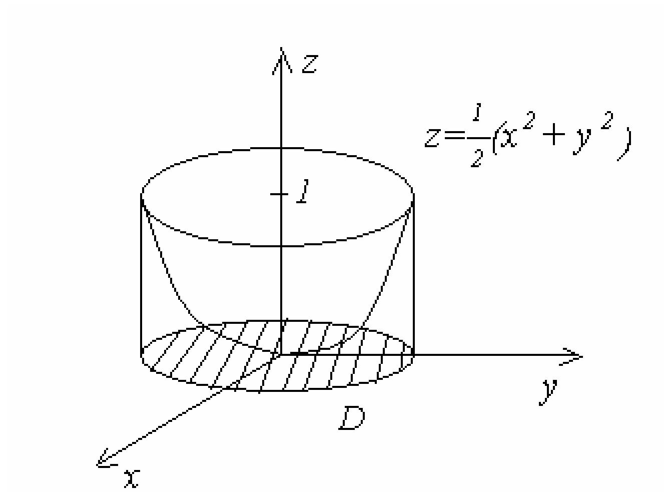


Figura 7.23

$$m = \iint_{\pi} \mu(P)\,d\sigma = \iint_{D} z\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{D}\left(x^2 + y^2\right)\sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dxdy = \frac{1}{2}\iint_{D^*} r^2\sqrt{1 + r^2}\,rdrd\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1 + r^2}\,dr$$

$$t = \sqrt{1 + r^2} \qquad r = \sqrt{t^2 - 1}$$

$$dr = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}2\pi\int_1^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{t^2 - 1}\right)^3 t\frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}\,dt = \pi\int_1^{\sqrt{3}}\left(t^2 - 1\right)t^2 dt = \pi\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \pi\left(\frac{9\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \pi\left(\frac{12\sqrt{3}}{15} + \frac{2}{15}\right) = \frac{2\pi}{15}\left(6\sqrt{3} + 1\right)$$

Exerciții:

1. Determinați aria unei părți din planul $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ care se află între planele de coordonate.

   $R: \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}$

2. Calculați aria paraboloidului $x^2+y^2=2az$ care se aftă în interiorul cilindrului $x^2+y^2=3a^2$.

   $R: \frac{14}{3}\pi a^2$

3. Calculați integrala de suprafață $\iint_{\pi} xyz\, d\sigma$ unde π este o parte a planului $x+y+z=1$ care se află între planele de coordonate.

   $R: \frac{\sqrt{3}}{120}$

Vezi ☺ seminar

7.6 Integrale triple

Formularea problemei

Presupunem că un corp material ocupă o regiune tridimensională $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Mai presupunem că în fiecare punct al corpului cunoaştem densitatea acestuia

$$\mu = \mu(P) = \mu(x, y, z) \tag{62}$$

Ne propunem să determinăm masa corpului. În acest scop, împărțim regiunea Ω în regiuni parțiale Ω_1, Ω_2, …, Ω_n cu volumele ΔV_1, ΔV_2, …, ΔV_n, respectiv. În fiecare Ω_k alegem un punct arbitrar P_k. Presupunem că densitatea corpului este aproximativ constantă în interiorul unei regiuni parțiale Ω_k, şi este egală cu $\mu(P_k)$. Masa Δm_k a regiunii parțiale Ω_k este

$$\Delta m_k \simeq \mu(P_k)\Delta V_k \tag{63}$$

Masa întregului corp va fi:

$$m \simeq \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k)\Delta V_k \tag{64}$$

Fie d cel mai mare dintre diametrele regiunilor parțiale Ω_k, $k=1,\dots,n$. Dacă suma (64) are limită finită pentru $d \to 0$, limită care să fie independentă de modul de împărțire a lui Ω în regiuni parțiale şi de alegerea punctelor $P_k \in \Omega_k$, atunci această limită o considerăm a fi *masa corpului*.

$$m = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} \mu(P_k)\Delta V_k \tag{65}$$

Pe de altă parte, această limită este cunoscută ca fiind *integrala triplă* a funcției $\mu(P)$ pe domeniul Ω, şi se notează

$$\iiint_{\Omega} \mu(P)\,dV = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} \mu(P_k)\Delta V_k \tag{66}$$

Atunci

$$m = \iiint_{\Omega} \mu(P)\,dV = \iiint_{\Omega} \mu(x,y,z)\,dxdydz \tag{67}$$

Aici *dxdydz* este un element de volum *dV* în coordonate cartezienee.

Definiția formală a integralei triple Considerăm o funcție mărginită $f(P)$ definită pe un domeniu închis Ω. Împărțim Ω în n regiuni parțiale Ω_1, Ω_2, …, Ω_n şi notăm cu ΔV_1, ΔV_2, …, ΔV_n, respectiv volumele acestora. În fiecare Ω_k alegem un punct arbitrar $P_k(x_k, y_k, z_k)$. Construim suma integrală

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta V_k \tag{68}$$

Fie d cel mai mare dintre diametrele regiunilor parțiale Ω_k, $k=1,\dots,n$.

Definiție: Dacă pentru $d \to 0$ suma integrală (68) are limită independentă de modul de împărțire a lui Ω în regiuni parțiale şi de alegerea punctelor $P_k \in \Omega_k$, atunci această limită se numeşte *integrală triplă* a funcției $f(x,y,z)$ pe Ω şi se notează

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dV \quad \text{sau} \quad \iiint_{\Omega} f(P)\,dV$$

Funcția $f(x,y,z)$ se numește *integrabilă* pe Ω. Prin definiție avem:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\,\Delta V_k \qquad (69)$$

Teoremă: Dacă o funcție $f(x,y,z)$ este *continuă* pe un domeniu închis Ω, atunci aceasta este *integrabilă* pe Ω.

Proprietățile integralei triple

Fie funcțiile $f(P)$ și $\varphi(P)$ integrabile pe domeniul Ω.

1. *Liniaritate*

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\alpha f(P)+\beta\varphi(P)\right)dV = \alpha\iiint\limits_{\Omega} f(P)\,dV + \beta\iiint\limits_{\Omega}\varphi(P)\,dV \qquad (70)$$

unde α, β sunt constante arbitrare.

2. *Monotonie* Dacă $f(P)\le\varphi(P)$ pe Ω, atunci

$$\iiint\limits_{\Omega} f(P)\,dV \le \iiint\limits_{\Omega}\varphi(P)\,dV \qquad (71)$$

3. *Calcularea volumului* Dacă $f(P)=1$ pe Ω, atunci

$$\iiint\limits_{\Omega} dV = V \qquad (72)$$

unde *V* este volumul lui Ω.

4. *Estimarea integralei* Dacă o funcție $f(P)$ este continuă pe un domeniu Ω închis și *M* și *m* sunt valorile sale maximă și minimă, atunci

$$mV \le \iiint\limits_{\Omega} f(P)\,dV \le MV \qquad (73)$$

5. *Aditivitate* Dacă $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, și cele două mulțimi nu au puncte interioare comune, iar $f(P)$ este integrabilă pe Ω, atunci $f(P)$ este integrabilă pe fiecare Ω_1 și Ω_2 și

$$\iiint\limits_{\Omega} f(P)\,dV = \iiint\limits_{\Omega_1} f(P)\,dV + \iiint\limits_{\Omega_2} f(P)\,dV \qquad (74)$$

Teorema de medie: Dacă o funcție $f(P)$ este continuă pe un domeniu închis Ω, atunci există un punct $P_m \in \Omega$ astfel încât

$$\iiint_{\Omega} f(P)\,dV = f(P_m)V \tag{75}$$

unde *V* este volumul lui Ω.

7.7 Calcularea integralei triple în coordonate carteziene

Ca şi în cazul integralei duble, problema se reduce la a scrie integrala ca o succesiune de integrale simple.

Presupunem că $f(x,y,z)$ este o funcție continuă pe un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

- Considerăm domeniul Ω un paralelipiped dreptunghic.

$$\Omega = \{(x,y,z),\ \ a \le x \le b,\ \ c \le y \le d,\ \ l \le z \le m\}$$

Proiecția lui Ω pe planul *yz* este dreptunghiul:

$$R = \{(y,z),\ \ c \le y \le d,\ \ l \le z \le m\}$$

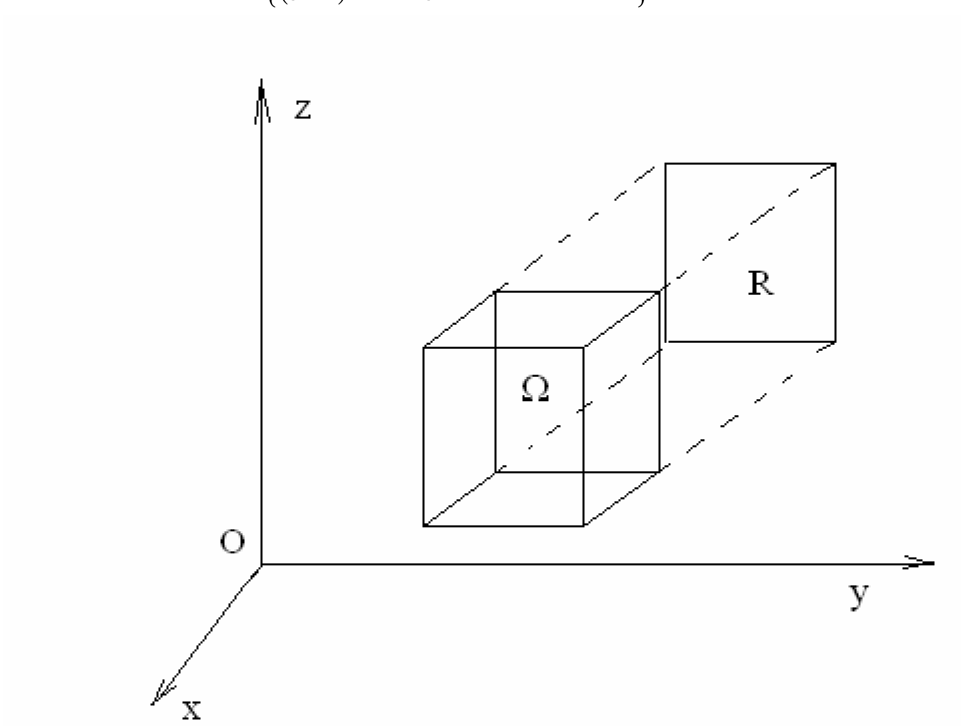


Figura 7.27

Atunci, vom avea:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \int_a^b dx \iint_R f(x,y,z)\,dS \qquad (76)$$

Substituind integrala dublă cu o succesiune de integrale simple, obținem:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_l^m f(x,y,z)dz \tag{77}$$

Deci, dacă domeniul Ω este un paralelipiped dreptunghic, putem reduce integrala triplă la trei integrale simple.

Formula (77) poate fi rescrisă astfel:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV = \iint\limits_{D} \left(\int_l^m f(x,y,z)dz \right) dxdy \tag{78}$$

unde $D = \{(x,y),\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ este un dreptunghi în planul *xy*. Acest dreptunghi este proiecția ortogonală a paralelipipedului Ω pe planul *xy*.

Exemplu:
Calculați:

$$\iiint\limits_{\Omega} (xyz + x)\,dxdydz\,, \qquad \Omega = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$$

$$\iiint\limits_{\Omega} (xyz + x)\,dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (xyz + x)dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(xy\frac{z^2}{2} + xz \Big|_0^1 \right) dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(\frac{xy}{2} + x \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{4} + xy \right) \Bigg|_0^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{5}{4}x \right) dx = \frac{5}{4}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{5}{8}$$

- Considerăm domeniul Ω astfel încât o suprafață *S* care mărgineşte domeniul Ω este intersectată de orice dreaptă paralelă cu axa *z* în nu mai mult de două puncte sau după o dreaptă. Presupunem că suprafața S_1 mărgineşte inferior domeniul Ω şi este definită de funcția $z = \varphi_1(x,y)$ şi că suprafața S_2 mărgineşte superior domeniul Ω şi este definită de funcția $z = \varphi_2(x,y)$.

Proiectăm S_1 şi S_2 pe planul *xy* într-un domeniu *D* mărginit de curba *L* . Domeniul Ω este mărginit lateral de o suprafață cilindrică S_3 cu generatoarele paralele cu axa *z*.
Prin analogie cu relația (78) putem scrie:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV = \iint\limits_{D} \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy \tag{79}$$

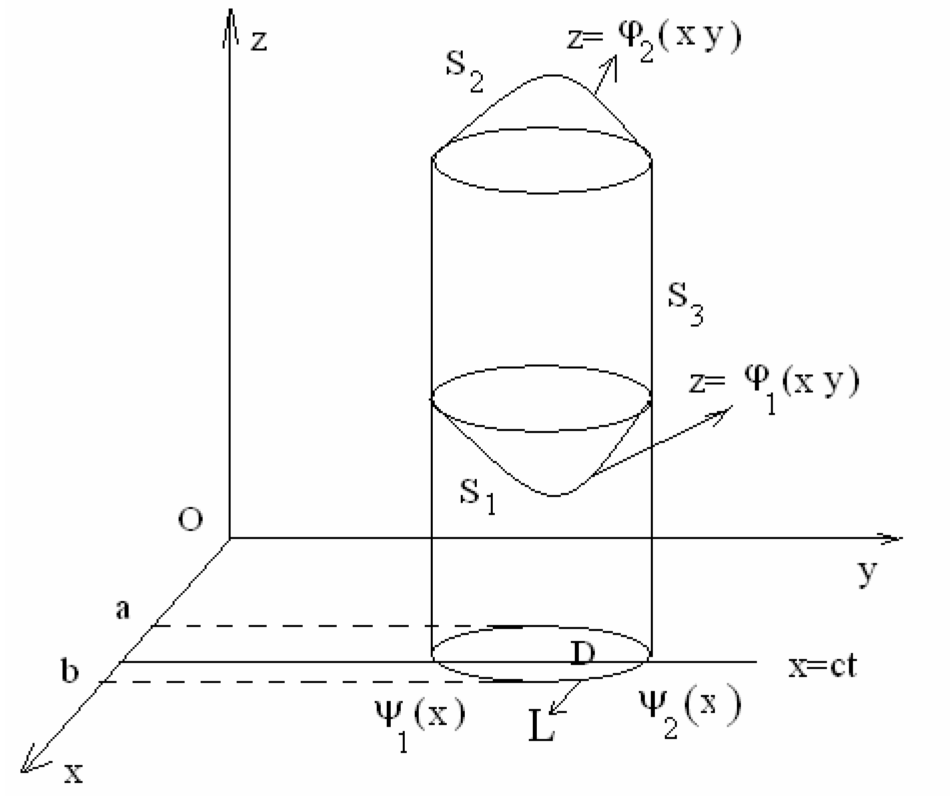


Figura 7.28

Dacă domeniul D din planul xy este mărginit de curbele $y = \psi_1(x)$ şi $y = \psi_2(x)$ şi $a \le x \le b$, atunci integrala dublă poate fi înlocuită cu o succesiune de integrale simple:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \qquad (80)$$

Aceasta este o generalizare a relației (77).

Exemplu:
Calculați volumul tetraedrului mărginit de planele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ şi $x + 2y + z - 6 = 0$.

$$x : 0 \to 6$$
$$y : 0 \to -\frac{x}{2} + 3$$
$$z : 0 \to 6 - x - 2y$$

$$V = \iiint_{\Omega} 1\,dxdydz = \int_0^6 dx \int_0^{3-\frac{x}{2}} dy \int_0^{6-x-2y} dz$$

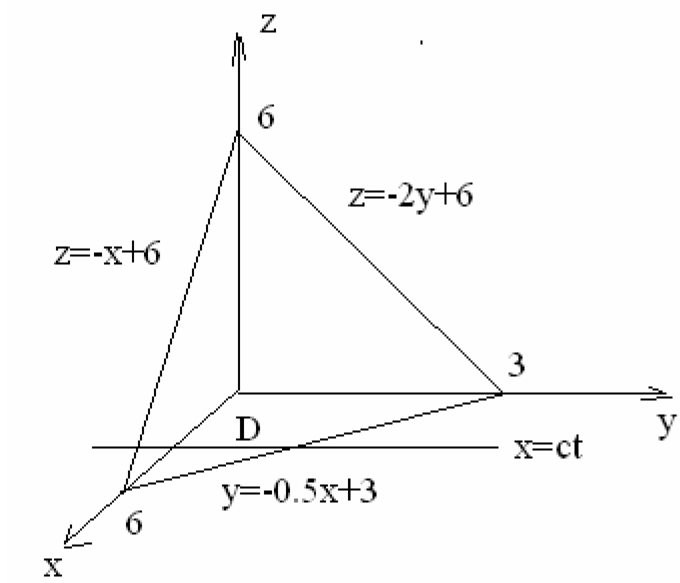


Figura 7.29

$$V=\int_0^6 dx\int_0^{3-\frac{x}{2}}(6-x-2y)dy=\int_0^6\left(6y-xy-2\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{3-\frac{x}{2}}dx=\int_0^6\left(6\left(3-\frac{x}{2}\right)-x\left(3-\frac{x}{2}\right)-\left(3-\frac{x}{2}\right)^2\right)dx$$

$$=\int_0^6\left(18-3x-3x+\frac{x^2}{2}-9+3x-\frac{x^2}{4}\right)dx=\int_0^6\left(9-3x+\frac{x^2}{4}\right)dx=\left(9x-3\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}\right)\Big|_0^6=54-54+18=18$$

7.8 Integrala triplă în coordonate cilindrice şi sferice

Într-o integrală triplă variabilele sunt schimbate în aceeaşi manieră ca într-o integrală dublă. Presupunem că $f(x,y,z)$ este o funcție continuă pe un domeniu închis $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ şi funcțiile:

$$x=x(\xi,\eta,\tau),\quad y=y(\xi,\eta,\tau),\quad z=z(\xi,\eta,\tau) \tag{81}$$

sunt continue împreună cu derivatele lor parțiale pe un domeniu închis Ω^*. Mai mult, presupunem că funcțiile (81) stabilesc o corespondență *unu-la-unu* între punctele $(\xi,\eta,\tau)\in\Omega^*$ şi punctele $(x,y,z)\in\Omega$.

O schimbare de variabile într-o integrală triplă este dictată de formula:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega^*} f\left[x(\xi,\eta,\tau), y(\xi,\eta,\tau), z(\xi,\eta,\tau)\right]|J|\,d\xi d\eta d\tau \qquad (82)$$

unde *J* este jacobianul transformării (81):

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \tau} \end{vmatrix} \qquad (83)$$

Practic, frecvent o integrală triplă în coordonate carteziene este transformată într-o integrală în coordonate cilindrice sau sferice.

- *Integrale triple în coordonate cilindrice*

În coordonate cilindrice, poziția unui punct $P(x,y,z)$ în spațiu este determinată de trei numere ρ,φ,z dintre care ρ şi φ sunt coordonatele polare ale proiecției P' a lui *P* pe planul *xy* şi *z* este coordonata *z* a lui *P*. Numerele (ρ,φ,z) se numesc *coordonate cilindrice* ale punctului *P*.

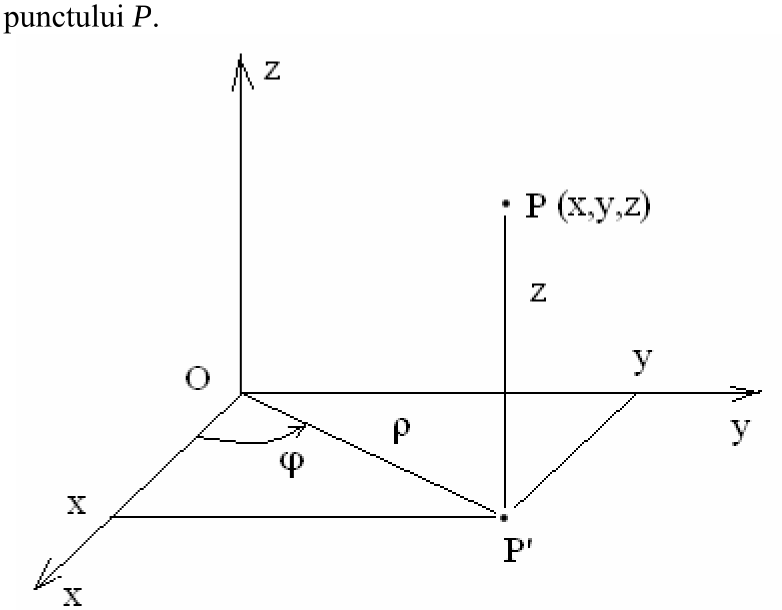


Figura 7.30 Coordonatele cilindrice

$$0 \le \rho < +\infty$$
$$0 \le \varphi < 2\pi$$
$$-\infty < z < +\infty \qquad (84)$$

În coordonate cilindrice, suprafețele de coordonate $\rho = ct$, $\varphi = ct$ şi $z = ct$ sunt respectiv: cilindri circulari cu axa egală cu axa z, semiplane adiacente axei z şi plane paralele cu planul *xy*.

Relațiile dintre coordonatele carteziene şi cele cilindrice sunt:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \tag{85}$$

Aceste funcții transformă domeniul Ω^* în Ω şi jacobianul transformării este:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \tag{86}$$

Deoarece $\rho \geq 0$, atunci $|J| = \rho$ şi pentru integrale triple formula (82) de transformare din coordonate carteziene în coordonate cilindrice devine:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega^*} f[\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z]\,\rho d\rho d\varphi dz \tag{87}$$

Exemplu:

Determinați volumul corpului mărgint de suprafețele: $z = x^2 + y^2$ şi $z = 2 - x^2 - y^2$.

Intersecția celor două suprafețe este curba:

$$L:\begin{cases} \rho = 1 & \text{cilindru} \\ z = 1 & \text{plan} \end{cases}$$

Cu proiecția pe planul *xy*:

$$L':\begin{cases} \rho = 1 & \text{cilindru} \\ z = 0 & \text{plan} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\rho : 0 \to 1 \\ &\varphi : 0 \to 2\pi \\ &z : \rho^2 \to 2 - \rho^2 \end{aligned}$$

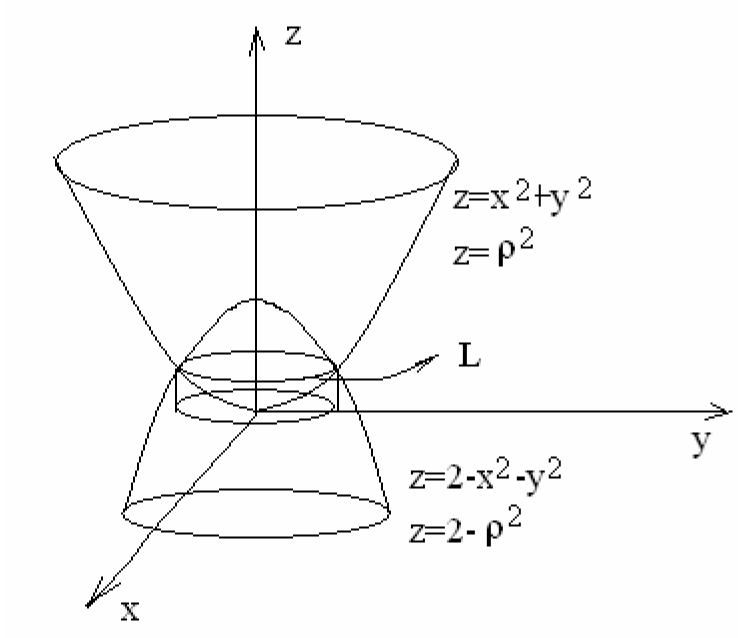


Figura 7.31

$$V = \iiint_{\Omega} 1dxdydz = \iiint_{\Omega^*} \rho d\rho d\varphi dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{2-\rho^2} dz = 2\pi \int_0^1 \rho \left(z\Big|_{\rho^2}^{2-\rho^2} \right) d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho \left(2-\rho^2-\rho^2 \right) d\rho = 4\pi \int_0^1 \left(\rho - \rho^3 \right) d\rho$$

$$= 4\pi \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = 4\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \pi$$

- *Integrale triple în coordonate sferice*

În coordonate sferice, poziția unui punct $P(x, y, z)$ în spațiu este determinată de trei numere r, φ, θ dintre care r este distanța de la originea sistemului de coordonate la punctul *P*, φ este unghiul dintre axa *x* şi proiecția vectorului radial *OP* al lui *P* pe planul *xy* şi θ este unghiul dintre axa *z* şi vectorul radial *OP* al lui *P*. Numerele (r, φ, θ) se numesc *coordonate sferice* ale punctului *P*.

$$\begin{aligned} &0 \le r < +\infty \\ &0 \le \varphi < 2\pi \\ &0 \le \theta \le \pi \end{aligned} \tag{88}$$

În coordonate sferice, suprafețele de coordonate sunt:

$r = ct$ sfere cu centrul în origine
$\varphi = ct$ semiplane adiacente axei z
$\theta = ct$ conuri circulare cu axa egală cu axa z

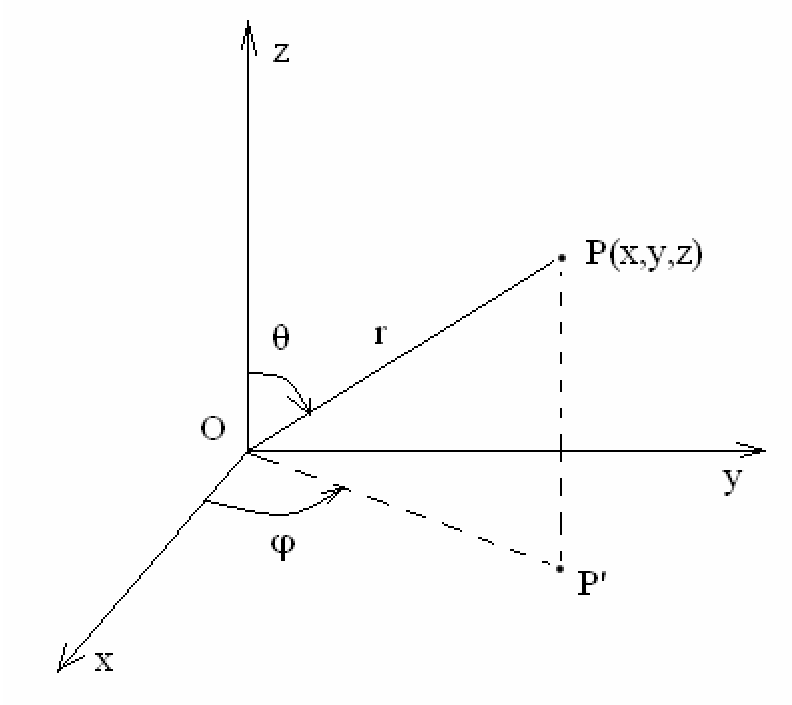


Figura 7.32

Relațiile dintre coordonatele carteziene şi cele sfericerice sunt:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{89}$$

Aceste funcții transformă domeniul Ω^* în Ω şi jacobianul transformării este:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta \tag{90}$$

Deoarece $r^2\sin\theta \geq 0$, atunci $|J| = r^2\sin\theta$ şi pentru integrale triple formula (82) de transformare din coordonate carteziene în coordonate sferice devine:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega^*} f\left[r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\right] r^2\sin\theta\, drd\varphi d\theta \tag{91}$$

Exemplu:

Determinați volumul corpului mărginit de suprafețele: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 = z^2$, $a < b$.

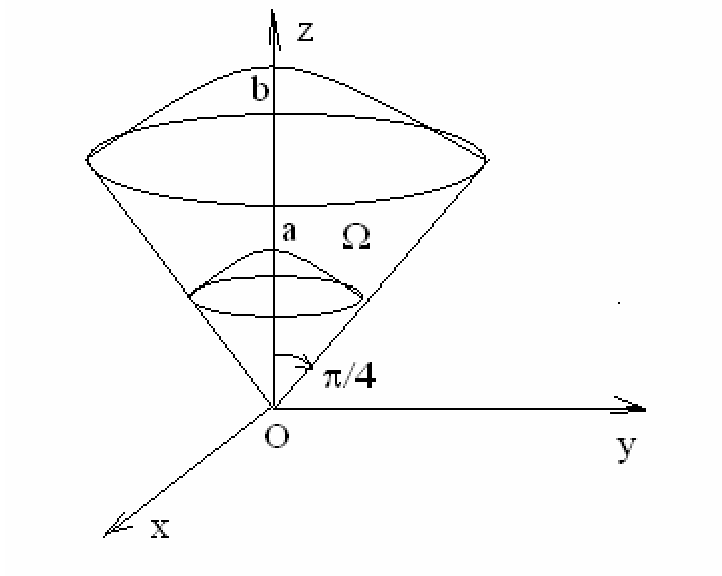


Figura 7.33

Domeniul Ω se află în interiorul conului. Cele două sfere sunt concentrice. Datorită simetriei domeniului vom trece la coordonate sferice.

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Din ecuațiile sferelor avem $a \le r \le b$, iar din ecuația conului determinăm domeniul de variație a coordonatei θ.

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \Rightarrow \quad r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi = r^2\cos^2\theta$$

$tg^2\theta = 1$ $\qquad \theta = \frac{\pi}{4}$ ecuația conului în coordonate sferice

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

$$V = \iiint\limits_{\Omega} 1dxdydz = \iiint\limits_{\Omega^*} r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin\theta d\theta \int_a^b r^2 dr = 2\pi\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/4} \frac{r^3}{3}\Bigg|_a^b = 2\pi\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)\left(b^3-a^3\right)$$

Cap. VIII Integrale curbilinii

8.1 Integrale curbilinii de primul tip

O *curbă parametrizată* continuă *AB* se defineşte cu ajutorul a două funcții continue $\varphi,\psi : I \to \mathbb{R}$, unde $I = [t_0, t_1]$.

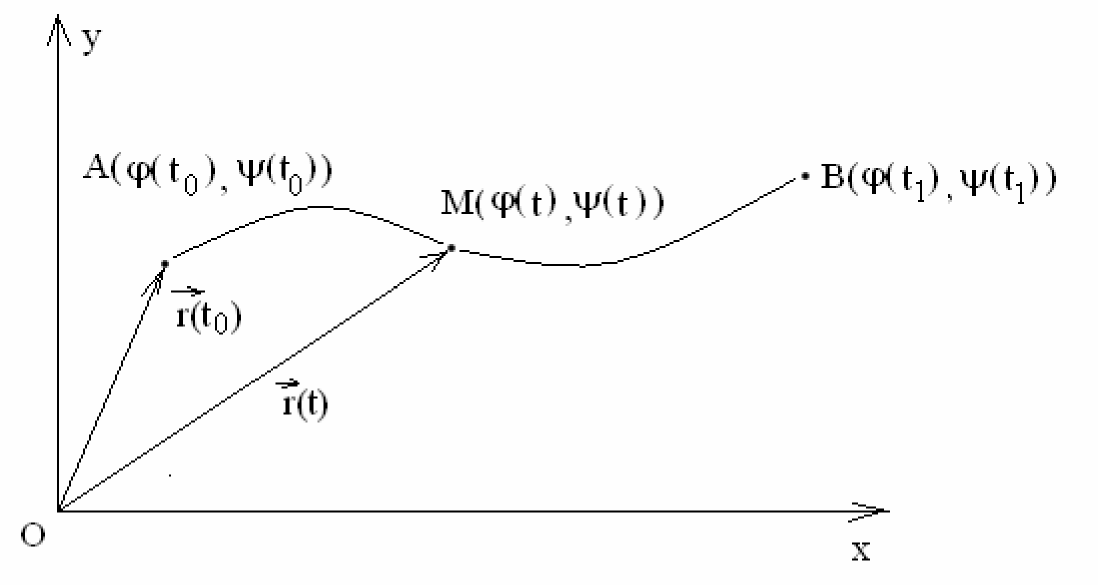


Figura 8.1

Ecuațiile *parametrice* ale curbei *AB* sunt:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t_0 \le t \le t_1 \qquad t \text{ parametru} \tag{1}$$

Ecuația *vectorială* a curbei *AB* este:

$$\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} \tag{2}$$

Curba *AB* este curbă parametrizată *netedă* , dacă funcțiile $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ au derivate continue pe intervalul $I = [t_0, t_1]$.

Fie *AB* o curbă plană, netedă sau netedă pe porțiuni, şi fie $f(M)$ o funcție definită pe *AB* sau pe un domeniu *D* care-l conține pe *AB*.

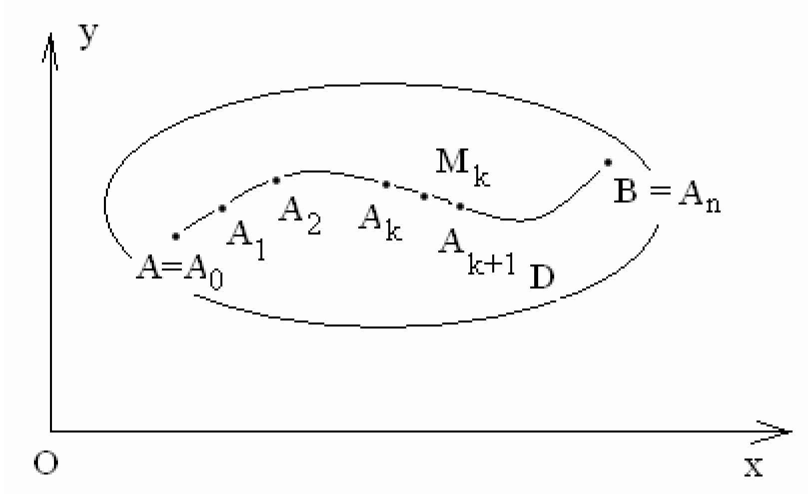


Figura 8.2

Considerăm punctele $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$ pe curba *AB*. Pe fiecare arc parțial $A_k A_{k+1}$ alegem un punct arbitrar M_k şi apoi construim suma:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(M_k\right) \Delta l_k \tag{3}$$

unde $\Delta l_k =$ lungimea arcului parțial $A_k A_{k+1}$.

Suma (3) se numeşte *sumă integrală* pentru $f\left(M\right)$ pe curba *AB*.
Fie Δl cea mai mare dintre lungimile arcelor parțiale, adică

$$\Delta l = \max_{0 \le k \le n-1} \Delta l_k \tag{4}$$

Definiție: Dacă suma integrală (3) are limită finită pentru $\Delta l \to 0$, care să fie independentă de modul de împărțire a lui *AB* în arce parțiale şi de alegerea punctelor M_k, atunci această limită se numeşte *integrală curbilinie de primul tip* a funcției scalare $f\left(M\right)$ pe curba *AB*.

Notații: $\int\limits_{AB} f\left(M\right) dl$ sau $\int\limits_{AB} f\left(x, y\right) dl$ unde punctul $\left(x, y\right) \in AB$

Conform definiției avem:

$$\int\limits_{AB} f\left(M\right) dl = \lim_{\Delta l \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(M_k\right) \Delta l_k \tag{5}$$

Spunem că $f\left(M\right)$ este *integrabilă* pe curba *AB* , iar *AB* se numeşte *contur de integrare*.

În cele ce urmează demonstrăm existența integralei curbilinii de primul tip.

Astfel, pentru curba *AB* considerăm drept parametru, lungimea *l* a arcului care începe în punctul inițial *A*.

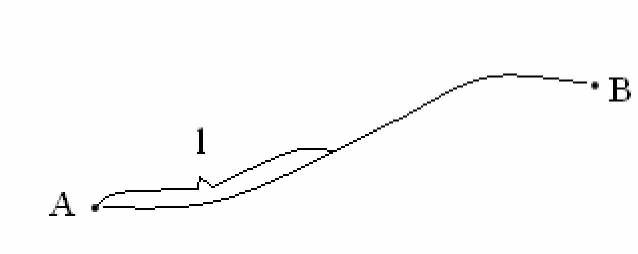


Figura 8.3

Cu acest parametru *l*, curba *AB* poate fi definită cu ajutorul *ecuațiilor naturale*:

$$\begin{cases} x = x(l) \\ y = y(l) \end{cases}, \qquad 0 \le l \le L \tag{6}$$

unde *L* este lungimea curbei *AB*. Cu această definiție a curbei, funcția $f(M)$, definită pe curbă va fi funcție de o singură variabilă l: $f\left(x(l), y(l)\right)$.

Notăm cu l_k valoarea lui l corespunzătoare punctului M_k de pe curbă, unde $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Suma integrală (3) poate fi rescrisă:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x(l_k), y(l_k)\right)\Delta l_k \tag{7}$$

Această sumă corespunde integralei definite:

$$\int_0^L f\left(x(l), y(l)\right) dl \tag{8}$$

Deoarece sumele integrale (3) şi (7) sunt egale, atunci şi integralele corespunzătoare sunt egale, şi avem:

$$\int_{AB} f(M)\, dl = \int_0^L f\left(x(l), y(l)\right) dl \tag{9}$$

Teoremă: Dacă $f(M)$ este *continuă* pe curba netedă *AB*, atunci integrala curbilinie $\int_{AB} f(M)\, dl$ există.

Proprietăți:

1.Valoarea integralei curbilinii de primul tip este independentă de sensul de integrare.

$$\int_{AB} f(M)\,dl = \int_{BA} f(M)\,dl \tag{10}$$

2. *Liniaritate*: Dacă există integralele curbilinii pentru funcțiile $f(M)$ şi $g(M)$ pe curba AB şi dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci există şi integrala curbilinie a funcției $\alpha f(M) + \beta g(M)$ pe curba AB astfel încât:

$$\int_{AB} \left[\alpha f(M) + \beta g(M)\right] dl = \alpha \int_{AB} f(M)\,dl + \beta \int_{AB} g(M)\,dl \tag{11}$$

3. *Aditivitate*: Dacă $C \in AB$ şi există $\int_{AB} f(M)\,dl$, atunci există şi integralele: $\int_{AC} f(M)\,dl$, $\int_{CB} f(M)\,dl$ şi

$$\int_{AB} f(M)\,dl = \int_{AC} f(M)\,dl + \int_{CB} f(M)\,dl \tag{12}$$

4. Dacă $f(M) \geq 0$ pe curba *AB*, atunci

$$\int_{AB} f(M)\,dl \geq 0 \tag{13}$$

5. Dacă $f(M)$ este integrabilă pe curba *AB*, atunci şi $\left|f(M)\right|$ este integrabilă pe curba *AB* şi are loc:

$$\left|\int_{AB} f(M)\,dl\right| \leq \int_{AB} \left|f(M)\right| dl \tag{14}$$

6. *Formula de medie*: Dacă $f(M)$ este *continuă* pe curba *AB*, atunci pe curbă există cel puțin un punct M_m astfel încât:

$$\int_{AB} f(M)\,dl = f(M_m)L \tag{15}$$

unde *L* este lungimea curbei *AB*.

- *Calcularea integralei curbilinii de primul tip*

Fie curba *AB* definită prin ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t_0 \le t \le t_1 \qquad t \text{ parametru} \qquad \begin{matrix} A \to t = t_0 \\ B \to t = t_1 \end{matrix}$$

<u>Ipoteză</u>: funcțiile $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ sunt continue pe $[t_0, t_1]$ împreună cu derivatele $\varphi'(t)$ şi $\psi'(t)$ şi mai mult

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 > 0$$

Elementul de arc al curbei este:

$$dl = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt \tag{16}$$

Atunci:

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt \tag{17}$$

Integrala din dreapta este una definită.

Observație: Dacă curba *AB* este definită în mod explicit, adică $y = g(x)$, $x \in [a, b]$, unde $g(x)$ este continuu diferențiabilă pe $[a, b]$, şi

$$\begin{matrix} A \to x = a \\ B \to x = b \end{matrix}$$

iar *x* este considerat parametru, atunci:

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + [g'(x)]^2}\, dx \tag{18}$$

Integrala din dreapta este una definită.

- *Integralele curbilinii de primul tip în spațiu*

Fie curba *AB* definită prin ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t) \end{cases} \qquad t_0 \le t \le t_1 \qquad t \text{ parametru} \tag{19}$$

Integrala curbilinie de primul tip a unei funcții scalare pe această curbă se reduce la o integrală definită astfel:

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,dl = \int_{t_0}^{t_1} f\big(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\big)\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2+\left[\omega'(t)\right]^2}\,dt \tag{20}$$

Exemplu:

Calculați integrala curbilinie $\int_L (x+y)\,dl$, unde L este conturul triunghiului cu vârfurile în punctele $O(0,0)$, $A(1,0)$ şi $B(0,1)$.

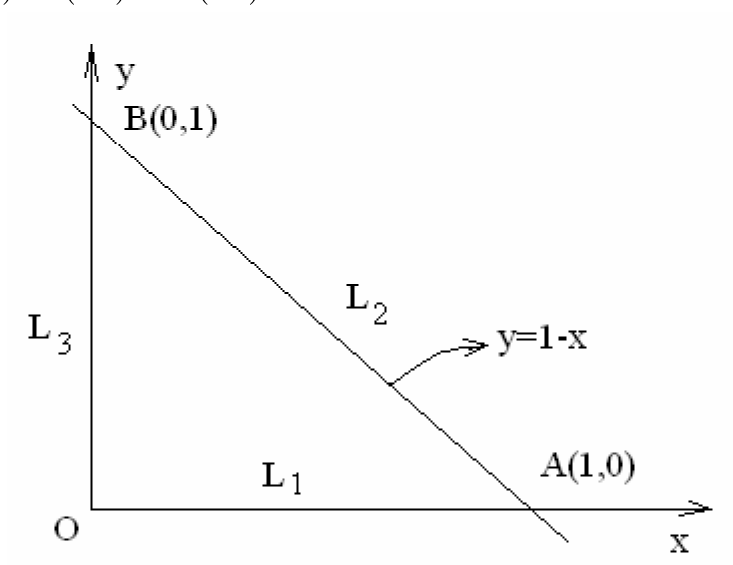


Figura 8.4

Din aditivitate, avem:

$$\int_L (x+y)\,dl = \int_{OA} (x+y)\,dl + \int_{AB} (x+y)\,dl + \int_{BO} (x+y)\,dl$$

Integrala pe *OA:* $0 \le x \le 1$, $y=0$, $dl=dx$, $y'=0$, $dl=\sqrt{1+0}\,dx$

$$\Rightarrow \quad \int_{OA} (x+y)\,dl = \int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Integrala pe *AB*: $0 \le x \le 1$, $y=1-x$, $y'=-1$, $dl=\sqrt{1+(-1)^2}\,dx=\sqrt{2}\,dx$

$$\Rightarrow \qquad \int_{AB}(x+y)\,dl = \int_{BA}(x+y)\,dl = \int_0^1 (x+1-x)\sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}x\Big|_0^1 = \sqrt{2}$$

Integrala pe *BO:* $\quad 0 \le y \le 1\,,\quad x = 0\,,\quad dl = dy$

$$\Rightarrow \qquad \int_{BO}(x+y)\,dl = \int_0^1 y\,dy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_L (x+y)\,dl = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

8.2 Integrale curbilinii de al doilea tip

Fie *AB* o curbă plană, netedă sau netedă pe porțiuni şi orientată, şi fie

$$\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} \tag{21}$$

o funcție vectorială definită pe un domeniu *D* care conține curba *AB*.

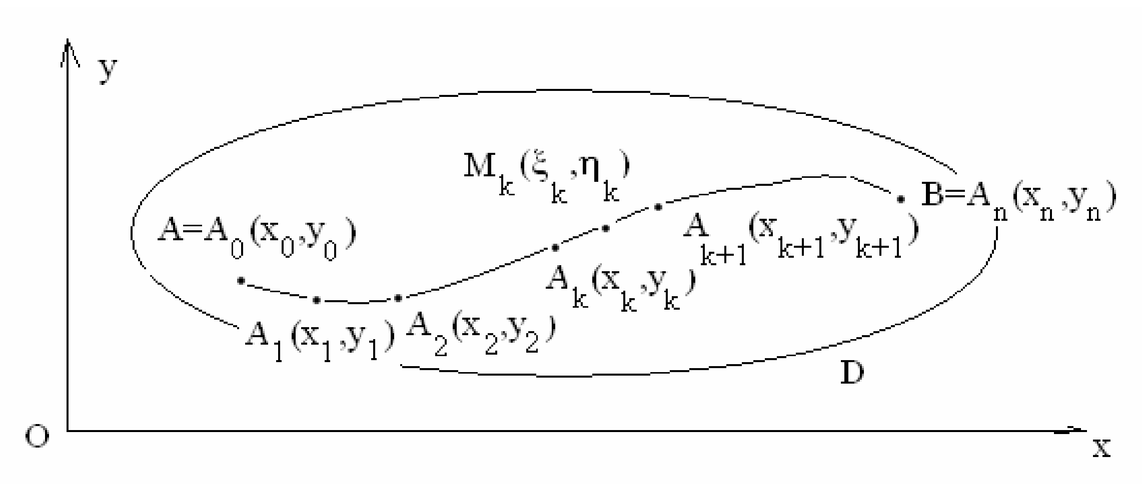


Figura 8.5

Impărțim curba *AB* în arce parțiale cu ajutorul punctelor $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$. Aceste puncte au coordonatele $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ respectiv. Pe fiecare arc parțial $A_k A_{k+1}$ alegem un punct arbitrar $M_k(\xi_k, \eta_k)$ şi formăm suma:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \tag{22}$$

unde $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ sunt componentele lungimii arcului parțial. Considerăm Δl cea mai mare dintre lungimile arcelor parțiale $A_k A_{k+1}$.

Definiție: Dacă suma integrală are limită finită pentru $\Delta l \to 0$, care să fie independentă de modul de împărțire a lui *AB* în arce parțiale şi de alegerea punctelor M_k, atunci această limită se numeşte *integrală curbilinie de al doilea tip* a funcției vectoriale $\vec{F}(M)$ pe curba *AB*.

Notație: $\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

Conform definiției

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \lim_{\Delta l \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left[P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \right] \tag{23}$$

Teoremă: Dacă pe un domeniu *D* care conține curba *AB*, funcțiile $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$ sunt *continue*, atunci există integrala

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Fie $\vec{r}(M) = x\vec{i} + y\vec{j}$ vectorul de poziție al punctului $M(x, y)$. Atunci, $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy$ şi sub integrala de mai sus avem un produs scalar:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = (\vec{F}, d\vec{r}) \tag{24}$$

In această situație integrala curbilinie de al doilea tip a funcției vectoriale $\vec{F}(M)$ pe curba *AB* poate fi notată pe scurt:

$$\int\limits_{AB} (\vec{F}, d\vec{r}) \tag{25}$$

- *Calcularea integralei curbilinii de al doilea tip*

Fie curba *AB* definită prin ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \qquad t_0 \le t \le t_1$$

Funcțiile $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ sunt continue pe $[t_0, t_1]$ împreună cu derivatele lor $\varphi'(t)$ şi $\psi'(t)$ şi pe măsură ce *t* parcurge intervalul $[t_0, t_1]$, punctul $M(x, y)$ se mişcă pe curba *AB* de la *A* la *B*.

Dacă funcțiile $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$ sunt continue pe un domeniu *D* care conține curba *AB* atunci integrala curbilinie se reduce la o integrală definită:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_0}^{t_1} \left[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t) \right] dt \qquad (26)$$

Exemplu:
Calculați integrala $\int_{AB} xdy - ydx$

1. pe segmentul de dreaptă care uneşte punctele $A(0,0)$ şi $B(1,1)$
2. pe parabola $y = x^2$ care conectează aceleaşi puncte

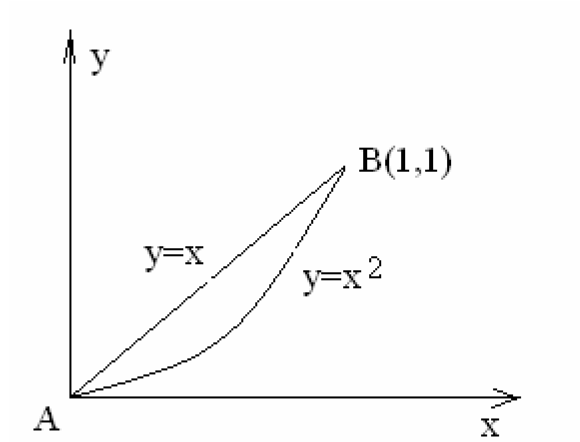


Figura 8.6

1) Ecuația dreptei *AB* este $y = x$, *x* fiind parametru cu $0 \le x \le 1$, iar $dy = dx$.

$$\int_{AB} xdy - ydx = \int_0^1 (xdx - xdx) = 0$$

2) Ecuația parabolei AB este $y = x^2$, x fiind parametru cu $0 \le x \le 1$, iar $dy = 2xdx$.

$$\int_{AB} xdy - ydx = \int_0^1 \left(x2xdx - x^2 dx \right) = \int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Observație: Valoarea integralei curbilinii de al doilea tip depinde de drumul de integrare.

- *Proprietățile integralei curbilinii de al doilea tip*

1. *Liniaritate* Dacă există integralele $\int_{AB} \left(\vec{F}_1, d\vec{r} \right)$ și $\int_{AB} \left(\vec{F}_2, d\vec{r} \right)$, atunci $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ există și integrala:

$$\int_{AB} \left(\alpha \vec{F}_1 + \beta \vec{F}_2, d\vec{r} \right) = \alpha \int_{AB} \left(\vec{F}_1, d\vec{r} \right) + \beta \int_{AB} \left(\vec{F}_2, d\vec{r} \right) \tag{27}$$

2. *Aditivitate* Dacă curba AB este reuniunea părților AC și CB și dacă există $\int_{AB} \left(\vec{F}, d\vec{r} \right)$, atunci există și integralele $\int_{AC} \left(\vec{F}, d\vec{r} \right)$ și $\int_{CB} \left(\vec{F}, d\vec{r} \right)$ și mai mult,

$$\int_{AB} \left(\vec{F}, d\vec{r} \right) = \int_{AC} \left(\vec{F}, d\vec{r} \right) + \int_{CB} \left(\vec{F}, d\vec{r} \right) \tag{28}$$

3. Spre deosebire de integrala curbilinie de primul tip, integrala curbilinie de al doilea tip depinde de direcția de parcurgere a curbei AB și schimbă semnul la modificarea sensului de parcurgere al curbei, adică

$$\int_{BA} Pdx + Qdy = -\int_{AB} Pdx + Qdy \tag{29}$$

Observație: Ultima proprietate corespunde interpretării fizice a integralei curbilinii de al doilea tip ca lucrul mecanic efectuat de forțele de câmp $\vec{F}$ de-a lungul unui drum: modificarea sensului de mișcare pe curbă schimbă semnul lucrului mecanic efectuat de câmp de-a lungul curbei.

- *Relația dintre integralele curbilinii de primul și al doilea tip*

Considerăm integrala curbilinie de al doilea tip:

$$\int_{AB} \left(\vec{F}, d\vec{r} \right) \tag{30}$$

unde *AB* este o curbă orientată (*A* este punctul inițial şi *B* este punctul final) definită de ecuația vectorială:

$$\vec{r} = \vec{r}\left(l\right) \tag{31}$$

unde l este lungimea curbei măsurată în sens pozitiv.

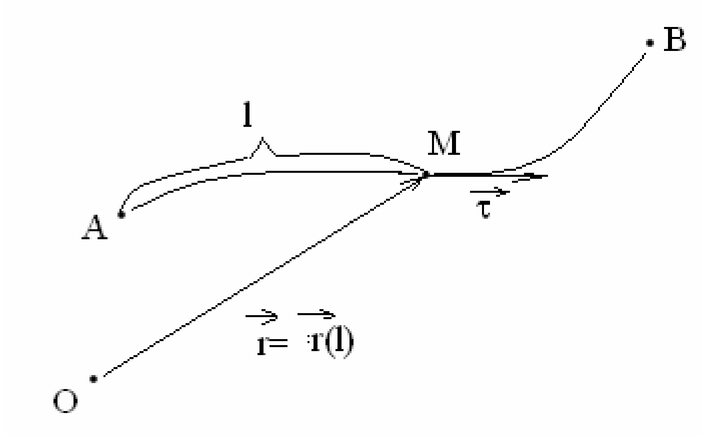


Figura 8.7

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dl} \qquad d\vec{r} = \vec{\tau}\,dl \tag{32}$$

Vectorul $\vec{\tau}$ este vectorul unitate tangent la curba *AB* în punctul *M*.

$$\int_{AB}\left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = \int_{AB}\left(\vec{F}, \vec{\tau}\,dl\right) = \int_{AB}\left(\vec{F}, \vec{\tau}\right)dl \tag{33}$$

Ultima integrală fiind o integrală curbilinie de primul tip.

8.3 Formula lui Green

Stabileşte o legătură între integrala *curbilinie* şi integrala *dublă*, folosită mai ales pentru calcularea integralelor curbilinii de-a lungul drumurilor închise.

Teorema Green: Dacă pe un domeniu închis *D* din planul *xy*, mărginit de un contur *L* neted pe porțiuni, funcțiile $P\left(x,y\right)$ şi $Q\left(x,y\right)$ sunt continue şi au derivate parțiale continue $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, atunci:

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \tag{34}$$

Integrarea are loc de-a lungul frontierei *L* a domeniului *D*, frontieră parcursă astfel încât domeniul *D* să rămână în stânga.

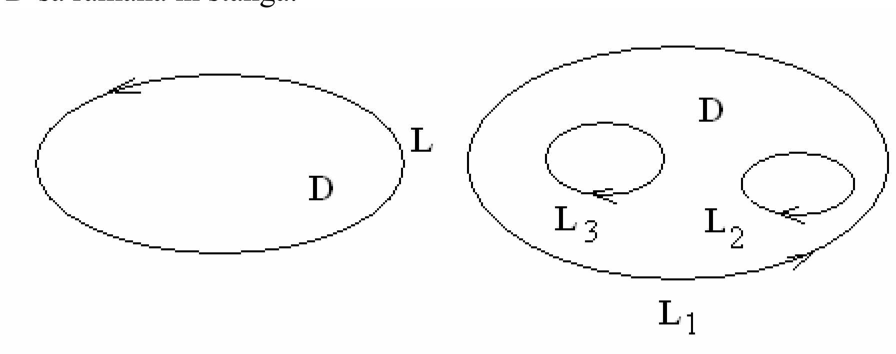


Figura 8.8

- *Aria unei figuri plane*

Considerăm $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$. Atunci,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -1$$

iar cu formula Green (34) obținem:

$$\oint_L -ydx + xdy = \iint_D 2dxdy = 2S$$

unde *S* este aria domeniului *D*.
In acest mod, am obținut o formulă pentru calculul ariei *S* a unui domeniu plan *D* folosind integrala curbilinie pe frontiera *L* a domeniului *D*:

$$S = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx \tag{35}$$

Exemplu:

Calculați aria domeniului mărginit de elipsa *L:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$L : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi)$$

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a\cos t\; b\cos t+b\sin t\; a\sin t\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt=\pi ab$$

Observație: Fie *AB* o curbă în spațiu, netedă pe porțiuni, orientată. Presupunem că pe un domeniu Ω, care conține curba *AB*, este definită o funcție vectorială:

$$\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k} \qquad (36)$$

unde *P*, *Q* şi *R* sunt funcții continue pe Ω.

Integrala curbilinie de al doilea tip în spațiu a funcției vectoriale $\vec{F}$ pe curba orientată *AB* este:

$$\int_{AB}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)=\int_{AB}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz \qquad (37)$$

Exerciții:

1) Calculați $\int_L xy\ dl$, unde *L* este un sfert din elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, aflat în primul cadran.

$$L:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}\qquad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_L xy\ dl=\int_0^{\pi/2}a\cos t\; b\sin t\sqrt{\left(-a\sin t\right)^2+\left(b\cos t\right)^2}\,dt=ab\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$

$$\varphi=\sin t$$
$$d\varphi=\cos t\ dt$$

$$\int_L xy\ dl=ab\int_0^1\varphi\sqrt{a^2\varphi^2+b^2-b^2\varphi^2}\ d\varphi=ab\int_0^1\varphi\sqrt{b^2+\left(a^2-b^2\right)\varphi^2}\,d\varphi$$

$$\psi=b^2+\left(a^2-b^2\right)\varphi^2$$
$$d\psi=\left(a^2-b^2\right)2\varphi d\varphi$$

$$\int_L xy\,dl = ab\frac{1}{2\left(a^2-b^2\right)}\int_{b^2}^{a^2}\sqrt{\psi}\,d\psi = ab\frac{1}{2\left(a^2-b^2\right)}\left.\frac{\psi^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right|_{b^2}^{a^2} = \frac{ab}{3}\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} = \frac{ab\left(a^2+ab+b^2\right)}{3\left(a+b\right)}$$

2) Calculați $\int_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, unde L este prima rotație a curbei elicoidale:

$$L:\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases} \qquad t\in\left[0,2\pi\right]$$

$$\int_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2} = \int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{\left(-a\sin t\right)^2+\left(a\cos t\right)^2+b^2}}{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t+b^2t^2}dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2t^2}dt = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a^2+b^2t^2} =$$

$$\varphi = bt$$
$$d\varphi = bdt$$

$$\int_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\int_0^{2\pi b}\frac{d\varphi}{a^2+\varphi^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\frac{1}{a}\left. arctg\frac{\varphi}{a}\right|_0^{2\pi b}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}arctg\frac{2\pi b}{a}$$

3) Calculați $\int_L ydx+xdy$, unde L este arcul de curbă $y=x^3$, care unește punctul $\left(0,0\right)$ cu punctul $\left(2,8\right)$.

Considerăm x parametru, $0\le x\le 2$, $y=x^3$, $dy=3x^2dx$.

$$\int_L ydx+xdy = \int_0^2\left(x^3dx+x3x^2dx\right) = 4\int_0^3 x^3dx = 4\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 = 16$$

4) Calculați $\int_L y^2dx+x^2dy$, unde L este este jumătatea superioară a elipsei:

$$L:\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad t \in [0,\pi)$$

parcursă în sens invers acelor de ceas.

$$\int_L y^2 dx + x^2 dy = \int_0^{\pi} \left((b\sin t)^2 (-a\sin t) + (a\cos t)^2 b\cos t \right) dt$$

$$= \int_0^{\pi} \left(-ab^2 \sin^3 t + a^2 b\cos^3 t \right) dt = -ab^2 \int_0^{\pi} \left(1-\cos^2 t\right)\sin t dt + a^2 b \int_0^{\pi} \left(1-\sin^2 t\right)\cos t dt$$

$$= ab^2 \int_{+1}^{-1} \left(1-\varphi^2\right) d\varphi + a^2 b \int_0^0 \left(1-\varphi^2\right) d\varphi = ab^2 \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3}\right)\Bigg|_1^{-1} = ab^2 \left(-2+\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}ab^2$$

8.4 Aplicații ale integralelor curbilinii

□ *Masa unei curbe*

O masă *m* este distribuită pe o curbă netedă *L* cu o densitate liniară $f(M)$. Dacă $f(M)$ şi *L* sunt cunoscute, ne propunem să determinăm masa *m*.

Împărțim curba *L* în *n* părți arbitrare $M_k M_{k+1}$ $(k = 0,1,\ldots,n-1)$ şi estimăm masa fiecărei părți $M_k M_{k+1}$ presupunând că pe fiecare din ele densitatea este constantă şi egală cu densitatea dintr-un punct al bucății, de exemplu fie acesta punctul cel mai din stânga. Astfel, densitatea pe bucata $M_k M_{k+1}$ este $f(M_k)$.

Valoarea aproximativă a masei totale *m* a curbei este:

$$m \simeq \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\Delta l_k \tag{38}$$

unde Δl_k este lungimea părții $M_k M_{k+1}$. Eroarea de aproximare va fi cu atât mai mică cu cât numărul bucăților în care e împărțită curba este mai mare. Considerăm:

$$\Delta l = \max_{0\le k\le n-1} \Delta l_k \tag{39}$$

Valoarea exactă a masei curbei L se obține trecând la limită în suma (38):

$$m = \lim_{\Delta l \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(M_k\right) \Delta l_k \tag{40}$$

Cum această limită reprezintă definiția integralei curbilinii de primul tip, avem:

$$m = \int_L f\left(M\right) dl \tag{41}$$

□ *Aria unei suprafețe cilindrice*

Considerăm o curbă AB în planul xy şi o funcție continuă $f\left(M\right) \geq 0$ definită pe curbă. Mulțimea de puncte $\left(M, f\left(M\right)\right)$ sau $\left(x, y, f\left(x, y\right)\right)$ formează o curbă pe suprafața cilindrică cu baza curba AB şi generatoarele paralele cu axa Oz. Vrem să determinăm aria suprafeței cilindrice $ABCD$ mărginită inferior de curba AB, superior de curba $z = f\left(M\right)$, $M \in$ curbei AB, şi verticalele AC şi BD.

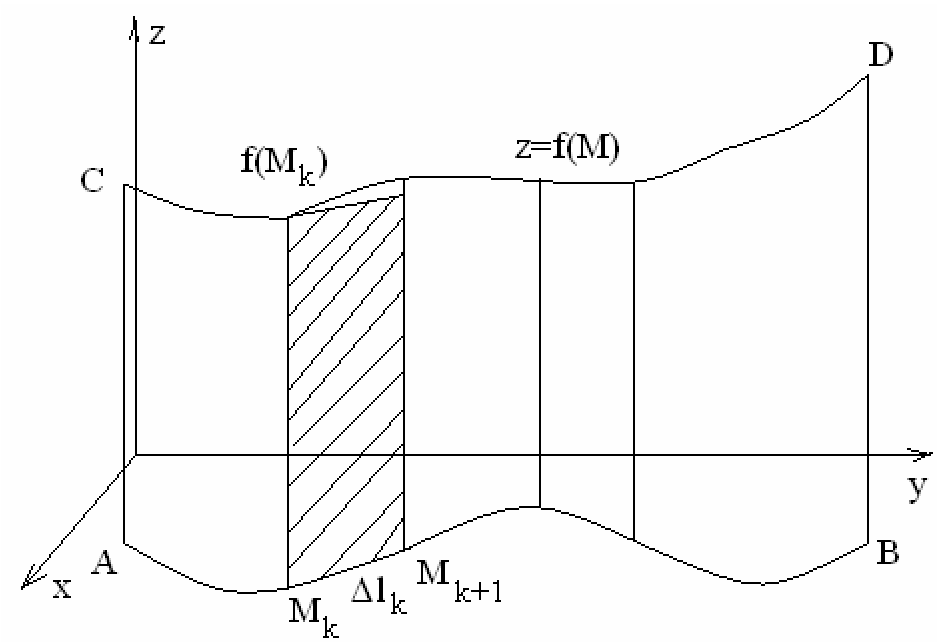


Figura 8.9

Pentru a rezolva problema, considerăm etapele:

1) Împărțim curba AB în n arce cu punctele:

$$A = M_0, M_1, \ldots, M_k, M_{k+1}, \ldots, M_n = B$$

2) Din fiecare punct M_k ridicăm perpendiculare pe planul *xy*, cu înălțimile $f(M_k)$. Acestea vor împărți suprafața cilindrică *ABCD* în *n* fâşii.

3) Înlocuim fiecare fâşie cu un dreptunghi cu baza Δl_k, unde Δl_k este lungimea arcului $M_k M_{k+1}$ şi înălțimea egală cu $f(M)$ într-un punct al arcului, de exemplu M_k. Aria aproximativă a fâşiei *k* va fi $f(M_k)\Delta l_k$, iar a suprafeței cilindrice *ABCD*:

$$S \simeq \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\Delta l_k \tag{42}$$

Continuarea in curs ☺

- *Calcularea lucrului mecanic*

Cap. IX Analiză vectorială

9.1 Câmp scalar. Derivata după o direcție

Fie $u = f(M)$ sau $u = f(x, y, z)$ un *câmp scalar* definit de o funcție scalară $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. De exemplu, un câmp de temperatură sau un câmp de presiune.

În spațiul $\mathbb{R}^3$, considerăm un punct M_0 şi o direcție definită de un vector $\vec{l}$. Fie un alt punct *M* astfel încât $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{l}$ şi notăm $\left|\overrightarrow{M_0M}\right| = \Delta l$. Creşterea câmpului asociată modificării argumentului de la M_0 la *M*, este

$$\Delta u = f(M) - f(M_0) \tag{1}$$

Definiție: Derivata câmpului $u = f(M)$ în punctul M_0 după direcția $\vec{l}$ este prin definiție:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\Delta l} \tag{2}$$

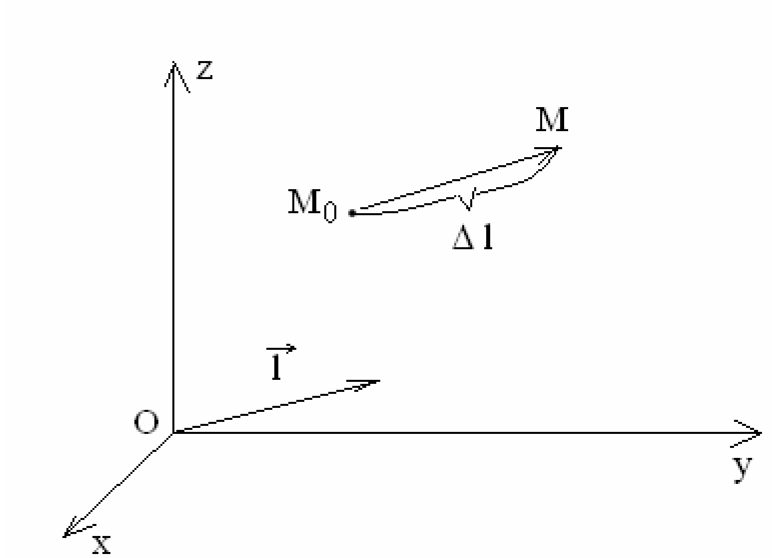


Figura 9.1

Observație: In condiții de diferențiabilitate, în coordonate carteziene, derivata câmpului scalar după o direcție se poate calcula astfel:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \cdot \cos\gamma \tag{3}$$

unde $\cos\alpha$, $\cos\beta$ şi $\cos\gamma$ sunt cosinuşii directori ai vectorului $\overrightarrow{M_0M}$ sau $\vec{l}$.

Exemplu:

Determinați derivata câmpului scalar $u = xe^y + ye^x - z^2$ în punctul $M_0(3,0,2)$ în direcția punctului $M_1(4,1,3)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\left(e^y + ye^x\right)\right|_{(3,0,2)} = e^0 + 0 \cdot e^3 = 1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\left(xe^y + e^x\right)\right|_{(3,0,2)} = 3 \cdot e^0 + e^3 = 3 + e^3$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.\left(-2z\right)\right|_{(3,0,2)} = -4$$

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \qquad \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \sqrt{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(3 + e^3\right) \times \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(-4\right) \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{e^3}{\sqrt{3}}$$

Concluzie: $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \frac{e^3}{\sqrt{3}} > 0$, deci câmpul scalar creşte în M_0 în direcția dată.

Caz particular:

Pentru un câmp plan $u = f(x, y)$ derivata câmpului în punctul M_0 după direcția $\vec{l}$ este:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \sin\alpha \tag{4}$$

unde unghiul α reprezintă unghiul dintre vectorul $\vec{l}$ şi axa Ox.

Exemplu:
Calculați derivata câmpului scalar $u = arctg\ xy$ în punctul $M_0(1,1)$ de pe parabola $y = x^2$ în direcția curbei (în sensul creşterii abscisei).

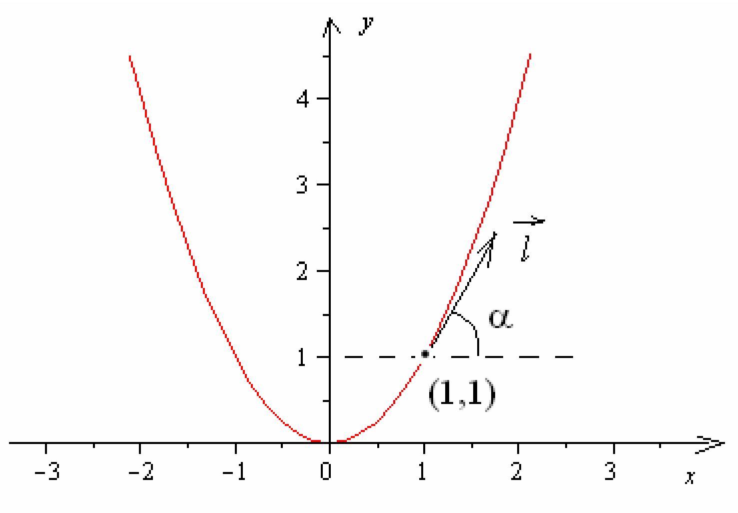


Figura 9.2

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{y}{1+x^2y^2}\right|_{(1,1)} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{x}{1+x^2y^2}\right|_{(1,1)} = \frac{1}{2}$$

$$tg\ \alpha = y'(x)\big|_{x=1} = 2 \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$$

Concluzie: $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \frac{3}{2\sqrt{5}} > 0$

9.2 Gradientul unui câmp scalar

Fie un câmp scalar definit de funcția scalară

$$u = f\left(x, y, z\right) \qquad (5)$$

unde *f* este o funcție diferențiabilă.

Definiție: Gradientul unui câmp scalar *u* într-un punct dat $M\left(x, y, z\right)$, este vectorul notat $grad\ u$, definit prin:

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \qquad (6)$$

Acesta este dependent de funcția de câmp şi de punctul în care se calculează.

Fie $\vec{l}^{\,0}$ vectorul unitate în direcția $\vec{l}$

$$\vec{l}^{\,0} = \frac{\vec{l}}{\left|\vec{l}\right|} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k} \qquad (7)$$

Atunci, relația (3) care defineşte derivata unui câmp scalar după o direcție poate fi scrisă sub forma unui produs scalar:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(grad\ u, \vec{l}^{\,0}\right) \qquad (8)$$

Adică, derivata câmpului scalar *u* după direcția $\vec{l}$ este egală cu produsul scalar al gradientului câmpului cu vectorul unitate $\vec{l}^{\,0}$.

Proprietățile gradientului:

1. Gradientul câmpului scalar are direcția perpendiculară pe suprafețele de nivel sau pe curbele de nivel dacă câmpul este plan.

$$grad\ u \perp \text{ suprafata de nivel u} = ct$$

Dacă pentru o funcție de două variabile, curbele de nivel arată ca în figura 9.3, atunci vectorul $grad\ u$ va fi perpendicular pe aceste curbe.

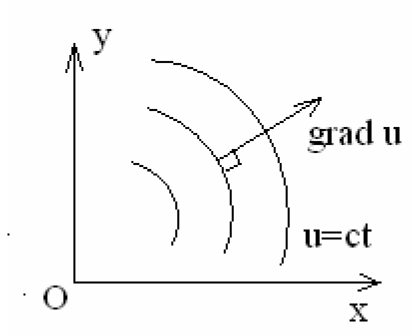


Figura 9.3

Exemplu:
Pentru un câmp scalar liniar:

$$u = ax + by + cz\,, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$grad\ u = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

O suprafață de nivel pentru acest câmp are forma:

$$ax + by + cz = ct$$

Vectorul normal la această suprafață (plan) este:

$$\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

Exemplu:
Pentru un câmp scalar plan $u = x^2 + y^2$, curbele de nivel sunt cercuri $x^2 + y^2 = ct$

$$grad\ u = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$$

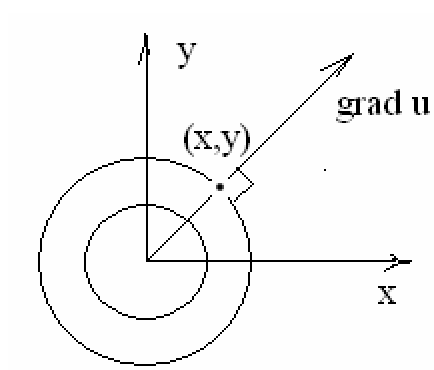
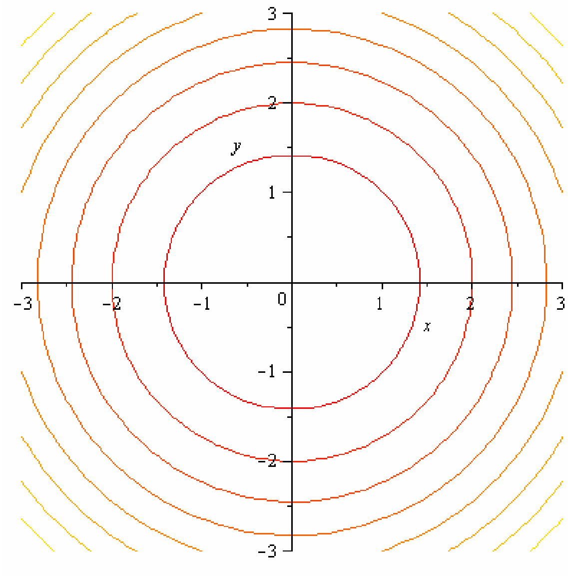
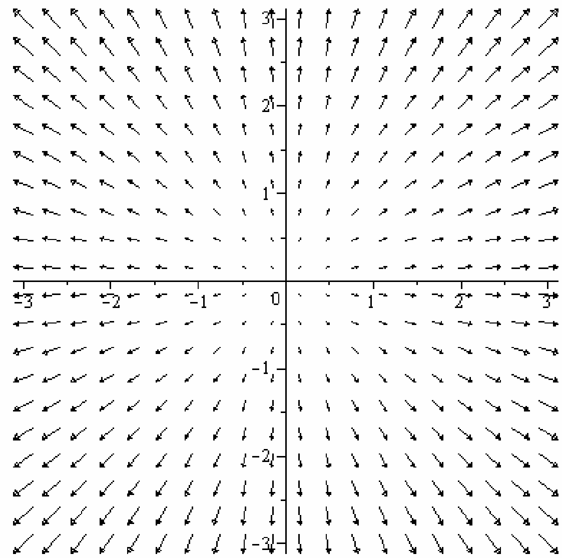


Figura 9.4





2. Gradientul este orientat în sensul creşterii funcției de câmp.

3. Lungimea (modulul) gradientului este egală cu cea mai mare derivată după o direcție în punctul câmpului în care se calculează gradientul.

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = |grad\ u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \tag{9}$$

Observație: In această formulă maximul se ia după toate direcțiile posibile într-un punct dat al câmpului.

Într-adevăr,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(grad\ u, \vec{l}^{\,0}\right) = |grad\ u| \cdot 1 \cdot \cos\varphi \tag{10}$$

unde φ este unghiul dintre vectorii $\vec{l}$ şi $grad\ u$. Cum valoarea maximă a lui $\cos\varphi$ este unu, atunci valoarea maximă a derivatei $\partial u / \partial l$ este $|grad\ u|$.

Exemplu:
In punctul $M_0(1,1,1)$ determinați direcția de variație maximă a câmpului scalar:

$$u = xy + yz + xz$$

şi valoarea acestei variații maxime.

Direcția de variație maximă a câmpului este dată de $grad\ u$:

$$grad\ u = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (y+x)\vec{k}$$

$$grad\ u(M_0) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Acest vector determină direcția de creştere maximă a câmpului în punctul $M_0(1,1,1)$. Mărimea acestei variații maxime a câmpului în punct este:

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = \left|grad\ u(M_0)\right| = \sqrt{2^2+2^2+2^2} = 2\sqrt{3}$$

Mărimile care sunt independente de alegerea sistemului de coordonate şi caracterizează anumite proprietăți ale unui obiect, se numesc *invarianți* pentru obiect. De exemplu, lungimea unei curbe este un invariant, unghiul dintre tangenta la curbă şi axa *Ox* nu este un invariant.

Definiția invariantă a gradientului unui câmp scalar: Gradientul unui câmp scalar este un vector cu direcția de-a lungul normalei la suprafața de nivel, cu sensul în direcția creşterii funcției de câmp. Mărimea gradientului este egală cu cea mai mare derivată după o direcție într-un punct dat.

În consecință, mărimea şi direcția gradientului caracterizează rata de creştere a câmpului. Forma invariantă a gradientului este:

$$grad\ \mathrm{u} = \left|grad\ u\right|\vec{n}^0 \tag{11}$$

unde $\vec{n}^0$ are direcția creşterii câmpului, iar $\left|grad\ \mathrm{u}\right| = \partial u/\partial n$. Atunci:

$$grad\ \mathrm{u} = \frac{\partial u}{\partial n}\vec{n}^0 \tag{12}$$

Într-adevăr, dacă în $\frac{\partial u}{\partial l} = \left(grad\ u, \vec{l}^{\,0}\right)$ înlocuim $\vec{l} \to \vec{n}$, obținem $\frac{\partial u}{\partial n} = \left(grad\ u, \vec{n}^0\right)$ şi apoi $\frac{\partial u}{\partial n} = \left(\left|grad\ u\right|\vec{n}^0, \vec{n}^0\right)$ şi atunci $\frac{\partial u}{\partial n} = \left|grad\ u\right|$.

Exemplu:
Determinați gradientul funcției distanță $r = d(M_0, M)$:

$$r=\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2} \qquad (13)$$

unde $M\left(x,y,z\right)$ este un punct arbitrar din câmp, iar $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ este un punct fixat din câmp.
Suprafețele de nivel sunt sfere cu centrul în $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$.

$$grad\ r=\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}$$

$$=\frac{\left(x-x_0\right)\vec{i}+\left(y-y_0\right)\vec{j}+\left(z-z_0\right)\vec{k}}{\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2}}=\vec{r}_0$$

unde $\vec{r}_0$ este vectorul unitate în direcția $\overrightarrow{M_0M}$.

Concluzie: $grad\ r=\vec{r}^{\,0}$ (14)

- **Proprietăți de calcul:**

1. $grad\left(Cu\left(M\right)\right)=Cgrad\ u\left(M\right),\ \ C=const$ (15)

2. $grad\left(u+v\right)=grad\ u+grad\ v$ (16)

3. $grad\left(uv\right)=v\ grad\left(u\right)+u\ grad\left(v\right)$ (17)

Într-adevăr,

$$grad\left(uv\right)=\frac{\partial\left(uv\right)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\left(uv\right)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\left(uv\right)}{\partial z}\vec{k}$$

$$=\left(v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\vec{i}+\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\vec{j}+\left(v\frac{\partial u}{\partial z}+u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{k}$$

$$=v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$=v\ grad\left(u\right)+u\ grad\left(v\right)$$

4. $grad\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\ grad\ u-u\ grad\ v}{v^2}, \quad v\neq 0$ (18)

5. $grad\ F(u)=F'(u)grad\ u$ (19)

Într-adevăr,

$$grad\ \mathrm{F}(u)=\frac{\partial F(u)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial F(u)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial F(u)}{\partial z}\vec{k}$$

$$=F'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+F'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+F'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

$$=F'(u)grad\ u$$

Caz particular: $grad\ F(r)=F'(r)\vec{r}^{\,0}$ (20)

9.3 Câmp vectorial. Linii de câmp şi ecuațiile diferențiale ale acestora

Definiție: Dacă în fiecare punct $M(x,y,z)$ al spațiului, este definit vectorul:

$$\vec{a}=\vec{a}(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k} \quad (21)$$

se spune că s-a definit *câmpul vectorial* $\vec{a}$.

Exemple:
Câmpul de forțe $\vec{F}$, câmpul de viteze $\vec{v}$ dintr-un fluid în mişcare.

În continuare, desenăm câteva câmpuri vectoriale plane.

1) $\vec{F}=3\vec{i}+\vec{j}$

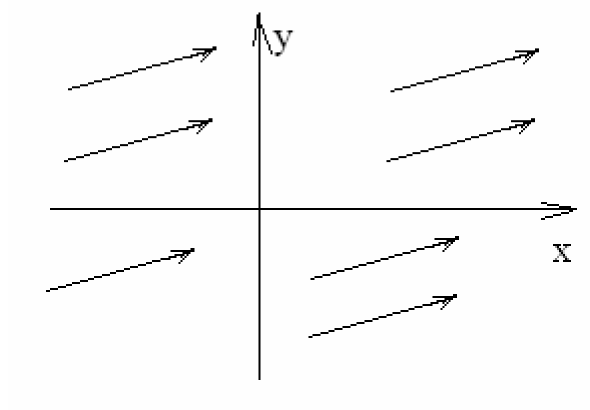


Figura 9.5

2) $\vec{F} = x\vec{i}$

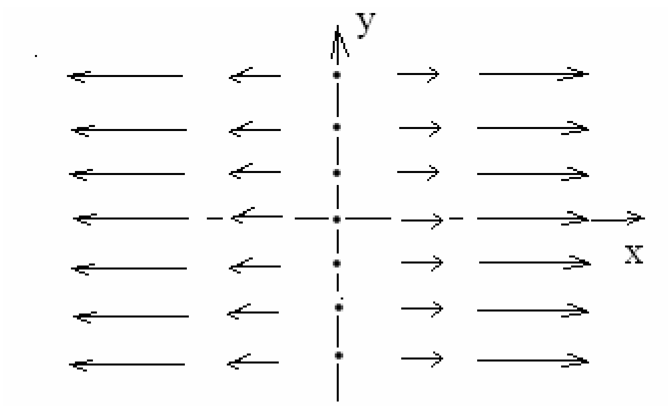


Figura 9.6

3) $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$

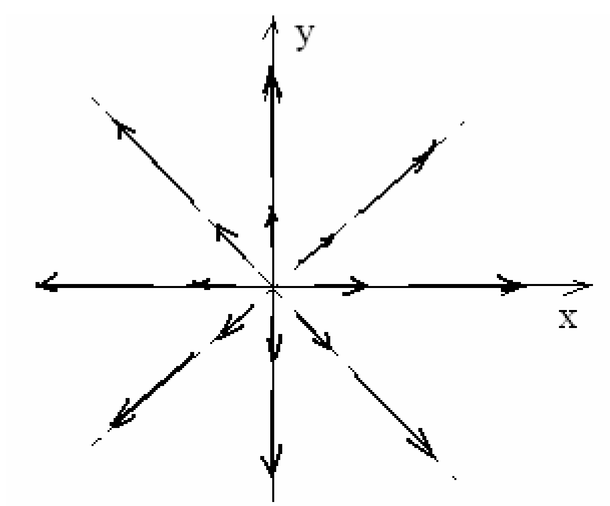


Figura 9.7

4) $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$

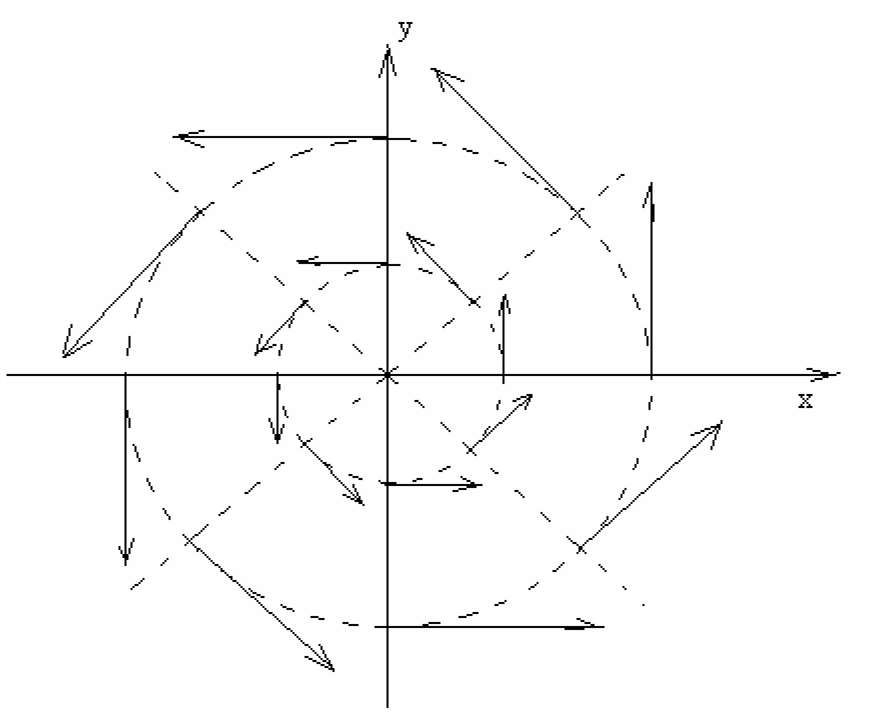


Figura 9.7b

Geometric, un câmp vectorial poate fi reprezentat prin *linii de câmp*. Linia de câmp a unui câmp vectorial $\vec{a}$ este o curbă astfel încât o tangentă la ea în orice punct *M* are aceeaşi direcţie ca şi vectorul de câmp $\vec{a}$ din acel punct.

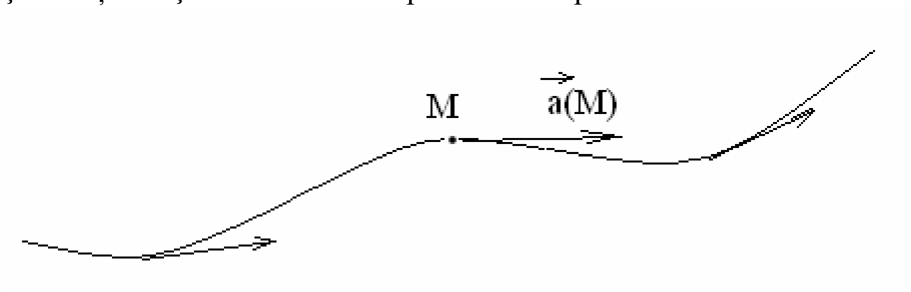


Figura 9.8

- Ecuaţiile diferenţiale ale liniilor de câmp

Fie un câmp vectorial definit de vectorul

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} \tag{22}$$

unde $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ sunt funcții continue cu derivate parțiale mărginite.

Considerăm în câmp, o curbă definită vectorial:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \tag{23}$$

Vectorul $\vec{r}(t)$ este vectorul de poziție al unui punct care se mişcă pe curbă, iar *t* este parametrul curbei. Atunci, vectorul tangent la curbă este

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \tag{24}$$

Din definiția liniei de câmp, curba (23) este linie de câmp dacă vectorii

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

şi

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

sunt coliniari în fiecare punct al liniei de câmp. Condiția de coliniaritate pentru vectori constă în proporționalitatea coordonatelor acestora. Deci, pe linia de câmp, trebuie să fie satisfăcute relațiile:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} \tag{25}$$

Aceste ecuații diferențiale ale linilor de câmp formează un sistem de ecuații diferențiale, care prin integrare ne dau:

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = C_1 \\ \varphi_2(x,y,z) = C_2 \end{cases} \tag{26}$$

Acesta este un sistem de ecuații din care determinăm liniile de câmp ca intersecție de două suprafețe. Prin modificarea parametrilor C_1 şi C_2 vom obține o familie de linii de câmp.

Exemplu:
Determinați liniile de câmp pentru câmpul $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}$.

Ecuațiile diferențiale ale liniilor de câmp sunt:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z}$$

Sau:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} \\ \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{2z} \end{cases}$$

Integrînd:

$$\begin{cases} \ln C_1 + \ln|x| = \ln|y| \\ \ln C_2 + 2\ln|x| = \ln|z| \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = C_1 x \\ z = C_2 x^2 \end{cases}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

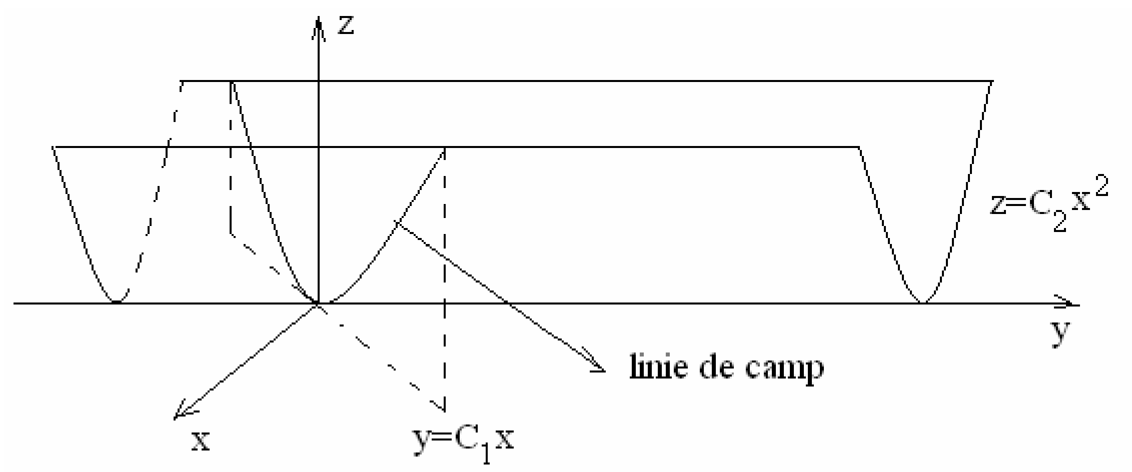


Figura 9.9

Intersecţia planelor $y = C_1 x$ cu cilindrii parabolici $z = C_2 x^2$ reprezintă o familie de linii de câmp cu doi parametri $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

9.4 Fluxul câmpului vectorial printr-o suprafaţă

Considerăm câmpul de viteze $\vec{v}$ al unui fluid în mişcare. Fie Σ o suprafaţă în câmp. *Curgerea* fluidului prin Σ este cantitatea de fluid care trece prin Σ în unitatea de

timp. Această curgere poate fi calculată uşor dacă viteza $\vec{v}$ este *constantă* şi suprafaţa Σ este *plană*.

Curgerea fluidului va fi egală cu volumul corpului cilindric cu baze paralele (Σ) şi generatoarea cu lungimea $|\vec{v}|$, deoarece în unitatea de timp fiecare particulă se deplasează un drum egal cu $|\vec{v}|$, în direcţia lui $\vec{v}$.

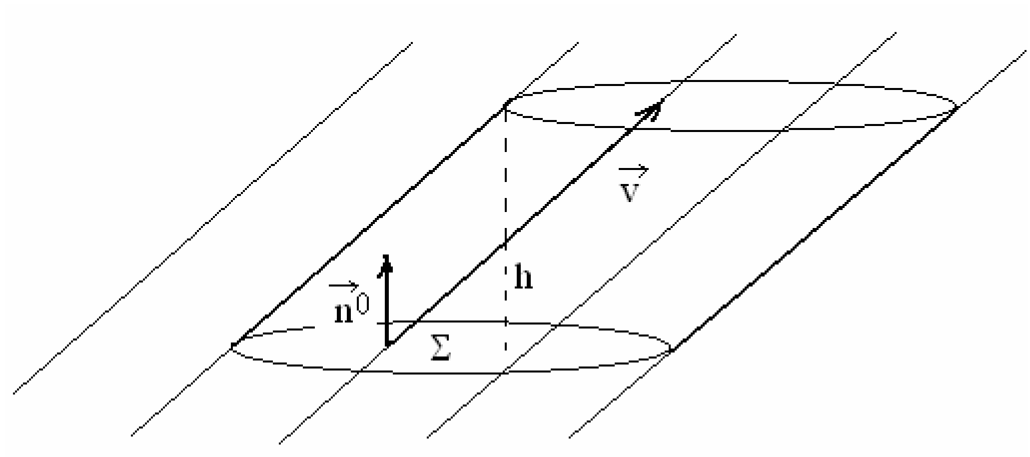


Figura 9.10

Curgerea va fi:

$$\Phi = S \cdot h \tag{27}$$

unde S este aria bazei Σ, iar $h = pr_{\vec{n}}\vec{v} = \left(\vec{v}, \vec{n}^0\right)$ este înălţimea cilindrului. Aici, $\vec{n}$ este vectorul normal la baza Σ.

In concluzie, pentru o viteză constantă $\vec{v}$ şi o suprafaţă plană Σ, curgerea este:

$$\Phi = \left(\vec{v}, \vec{n}^0\right) \cdot S \tag{28}$$

Dacă viteza $\vec{v}$ variază continuu şi dacă suprafaţa Σ este netedă atunci putem împărţi Σ în bucăţi parţiale $\Sigma_k \left(k = 1, 2, \ldots, n\right)$ atât de mici încât să putem aproxima pe fiecare Σ_k ca fiind plană şi vectorul $\vec{v}$ constant pe aceasta.

Intrucât curgerea fluidului prin Σ este egală cu suma curgerilor prin toate bucăţile parţiale Σ_k, vom scrie următoarea formulă aproximativă pentru curgere:

$$\Phi \cong \sum_{k=1}^{n} \left(\vec{v}, \vec{n}^0\right)_{P_k} \cdot \Delta\sigma_k \tag{29}$$

unde P_k este un punct din bucata Σ_k, $\Delta\sigma_k$ este aria lui Σ_k , iar $\left(\vec{v},\vec{n}^0\right)_{P_k}$ este produsul scalar calculat cu $\vec{v}$ şi $\vec{n}^0$ consideraţi în punctual $P_k \in \Sigma_k$.

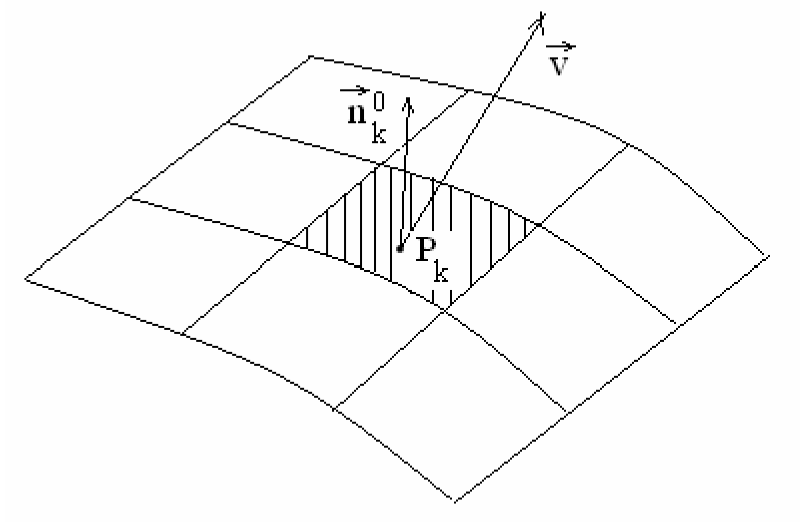


Figura 9.11

Curgerea prin Σ va fi limita relaţiei precedente (29), atunci când cel mai mare dintre diametrele bucăţilor parţiale Σ_k tinde la zero

$$\Phi = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{v},\vec{n}^0\right)_{P_k}\cdot\Delta\sigma_k = \iint_{\Sigma}\left(\vec{v},\vec{n}^0\right)d\sigma \qquad (30)$$

unde d este cel mai mare dintre diametrele bucăţilor parţiale Σ_k $\left(k=1,\ldots,n\right)$. Integrala care defineşte curgerea fluidului este o integrală de suprafaţă a funcţiei scalare $\left(\vec{v},\vec{n}^0\right)$ pe suprafaţa Σ.

În analogie cu noţiunea de *curgere* printr-o suprafaţă, vom introduce noţiunea de *flux* a unui vector $\vec{a}$ prin suprafaţa Σ.

Definiţie: *Fluxul unui vector* $\vec{a}$ printr-o suprafaţă Σ este integrala pe suprafaţa Σ a proiecţiei lui $\vec{a}$ pe normala la suprafaţă:

$$\Phi = \iint_{\Sigma}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma = \iint_{\Sigma}a_n d\sigma = \iint_{\Sigma}\left(\vec{a},d\vec{\sigma}\right) \qquad (31)$$

unde $d\vec{\sigma} = \vec{n}^0 d\sigma$.

Observaţie: Integrala din definiţie există dacă câmpul vectorial $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ este continuu, adică componentele sale $P\left(x,y,z\right)$, $Q\left(x,y,z\right)$ şi $R\left(x,y,z\right)$ sunt continue, şi dacă suprafaţa Σ este netedă.

Exemplu:
Considerăm câmpul electric produs de o sursă punctiformă plasată în originea sistemului de coordonate. Intensitatea câmpului într-un punct oarecare P va fi:

$$\vec{E} = \frac{q}{r^2}\vec{r}^{\,0}$$

unde q este sarcina, $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ este vectorul de poziție al punctului P. Vrem să calculăm fluxul lui $\vec{E}$ prin S_R , o sferă cu rază R şi centrul în originea sistemului de coordonate.

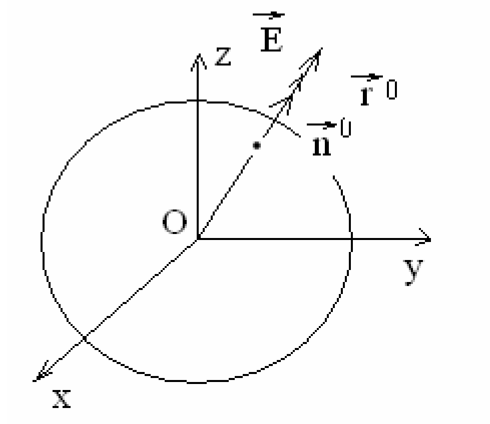


Figura 9.12

$$\left(\vec{E},\vec{n}^0\right) = \left(\vec{E},\vec{r}^{\,0}\right) = \left(\frac{q}{r^2}\vec{r}^{\,0},\vec{r}^{\,0}\right) = \frac{q}{r^2}\left(\vec{r}^{\,0},\vec{r}^{\,0}\right) = \frac{q}{r^2}$$

$$\Phi = \iint_{S_R}\left(\vec{E},\vec{n}_0\right)d\sigma = \frac{q}{R^2}\iint_{S_R} d\sigma = \frac{q}{R^2}4\pi R^2 = 4\pi q$$

- Proprietățile fluxului unui vector printr-o suprafață

1. *Liniaritate*

$$\iint_{\Sigma}\left(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b},\vec{n}^0\right)d\sigma = \lambda\iint_{\Sigma}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma + \mu\iint_{\Sigma}\left(\vec{b},\vec{n}^0\right)d\sigma \tag{6}$$

2. *Aditivitate* Dacă $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$,

$$\iint_{\Sigma}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma = \iint_{\Sigma_1}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma + \iint_{\Sigma_2}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma \tag{7}$$

3. Fluxul depinde de orientarea suprafeței, adică de orientarea normalei la o suprafață. Conceptul de flux stabilit se referă doar la suprafețele cu două fețe

(orientabile). Notăm cu Σ^{+} fața lui Σ pe care considerăm normala $\vec{n}$, şi cu Σ^{-} fața lui Σ pe care considerăm normala $-\vec{n}$. Evident $\vec{n}_{-}^{0}=-\vec{n}_{+}^{0}$.

$$\iint_{\Sigma^{-}}\left(\vec{a},\vec{n}_{-}^{0}\right)d\sigma=-\iint_{\Sigma^{+}}\left(\vec{a},\vec{n}_{+}^{0}\right)d\sigma \tag{8}$$

Exemplu:

Calculați fluxul vectorului de poziție $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ prin suprafața unui cilindru circular drept cu înălțimea H, raza bazei R şi axa egală cu axa z.

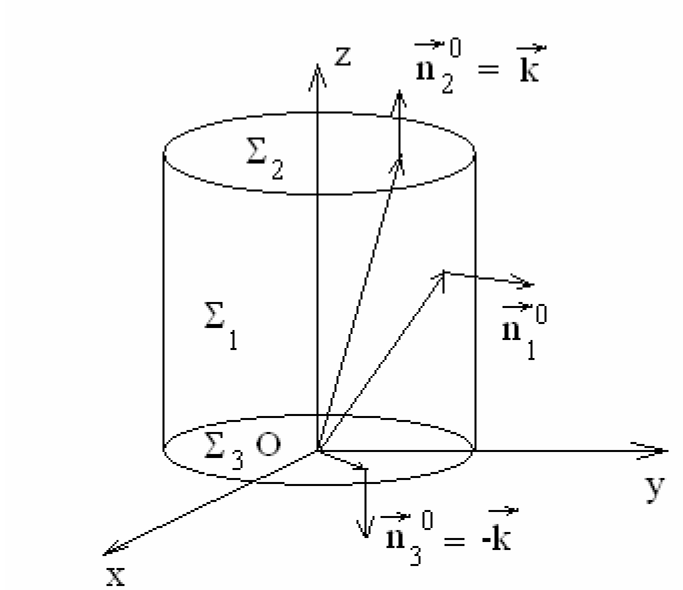


Figura 9.13

$$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$$

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3$$

$$\left(\vec{r},\vec{n}_1^{0}\right)=pr_{\vec{n}_1^{0}}\vec{r}=R$$

$$\Phi_1=\iint_{\Sigma_1}\left(\vec{r},\vec{n}_1^{0}\right)d\sigma=R\iint_{\Sigma_1}d\sigma=R2\pi RH$$

$$\left(\vec{r},\vec{n}_2^{0}\right)=\left(\vec{r},\vec{k}\right)=pr_{\vec{k}}\vec{r}=H$$

$$\Phi_2=\iint_{\Sigma_2}\left(\vec{r},\vec{n}_2^{0}\right)d\sigma=H\iint_{\Sigma_2}d\sigma=H\pi R^2$$

$$\left(\vec{r},\vec{n}_3^{0}\right)=\left(\vec{r},-\vec{k}\right)=pr_{-\vec{k}}\vec{r}=0$$

$$\Phi_3 = \iint_{\Sigma_2} \left(\vec{r}, \vec{n}_3^0\right) d\sigma = 0$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 2\pi R^2 H + \pi R^2 H + 0 = 3\pi R^2 H$$

9.5 Fluxul unui vector printr-o suprafață deschisă

Metode de calculare a fluxului unui vector printr-o suprafață deschisă:

- **Proiecția pe un plan de coordonate**.

Fie S o suprafață proiectabilă în mod unic într-un domeniu D_{xy} din planul xy. Suprafața S poate fi definită de ecuația $z = f(x, y)$, şi deoarece elementul de suprafață pe S este

$$d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy \tag{9}$$

fluxul prin S înseamnă integrala dublă:

$$\Phi = \iint_S \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left.\frac{\left(\vec{a}, \vec{n}^0\right)}{|\cos\gamma|}\right|_{z=f(x,y)} dxdy \tag{10}$$

Observație: Vectorul unitate $\vec{n}^0$ al normalei la fața aleasă a suprafeței se determină cu:

$$\vec{n}^0 = \pm \frac{grad\left[z - f(x, y)\right]}{\left|grad\left[z - f(x, y)\right]\right|} = \pm \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \tag{11}$$

Semnul plus corespunde unui unghi γ ascuțit între normala $\vec{n}^0$ şi axa z, iar semnul minus corespunde unui unghi γ obtuz.

Simbolul $\left.\frac{\left(\vec{a}, \vec{n}^0\right)}{|\cos\gamma|}\right|_{z=f(x,y)}$ înseamnă că ar trebui să substituim $f(x, y)$ în locul lui z.

Exemplu: Determinați fluxul vectorului $\vec{a} = y^2\vec{j} + z\vec{k}$ prin o parte a suprafeței parabolice $z = x^2 + y^2$ tăiată de planul $z = 2$. Normala se consideră spre exteriorul paraboloidului.

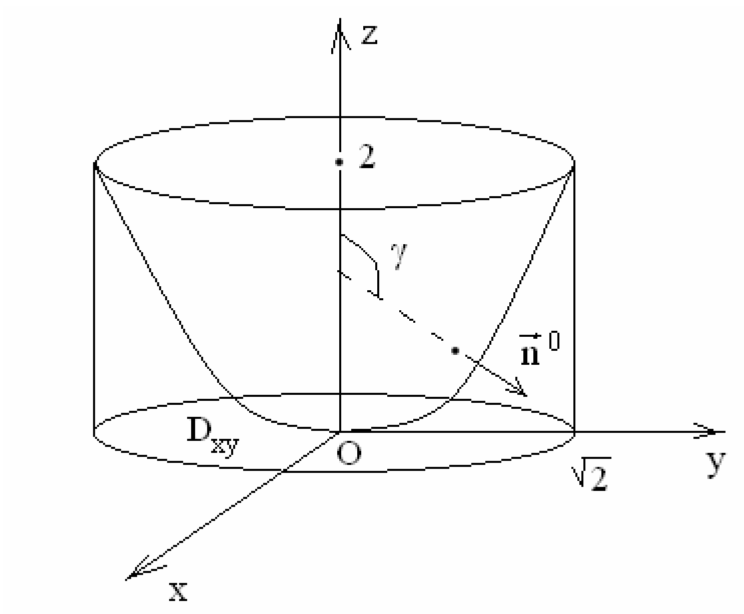


Figura 9.14

Proiecția suprafeței parabolice pe planul xy este:

$$D_{xy} = \{(x, y),\ x^2 + y^2 \le 2\}$$

Vectorul unitate normal la suprafață se calculează astfel:

$$\vec{n}^0 = \pm \frac{grad\left(z - x^2 - y^2\right)}{\left|grad\left(z - x^2 - y^2\right)\right|} = \pm \frac{-2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

Deoarece vectorul unitate normal la suprafață $\vec{n}^0$, formează un unghi obtuz cu axa Oz, alegem semnul minus.

$$\vec{n}^0 = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

$$\left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) = \frac{2y^3 - z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

$$\cos\gamma = \measuredangle\left(\vec{n}^0, \vec{k}\right) = -\frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

$$\frac{1}{|\cos\gamma|} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

$$\left.\frac{\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)}{|\cos\gamma|}\right|_{z=f(x,y)} = \left.\left(\frac{2y^3 - z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \cdot \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\right)\right|_{z=x^2+y^2} = 2y^3 - x^2 - y^2$$

$$\Phi = \iint_S \left(\vec{a},\vec{n}^0\right) d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left(2y^3 - x^2 - y^2\right) dxdy$$

Datorită simetriei domeniului D_{xy}, transformăm integrala în coordonate polare.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho : 0 \to \sqrt{2} \\ \varphi : 0 \to 2\pi \end{array}$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \left(2\rho^3 \sin^3\varphi - \rho^2\right)\rho d\rho = \int_0^{2\pi} \left.\left(2\sin^3\varphi \frac{\rho^5}{5} - \frac{\rho^4}{4}\right)\right|_0^{\sqrt{2}} d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{5}\left(\sqrt{2}\right)^5 \sin^3\varphi - \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}\right)^4\right) d\varphi =$$

$$= \frac{8}{5}\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2\varphi\right)\sin\varphi d\varphi - \int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{8}{5}\sqrt{2}\int_1^1 \left(1 - t^2\right) dt - 2\pi = -2\pi$$

9.5 Fluxul unui vector printr-o suprafață deschisă-continuare

Observație: Dacă vrem să calculăm fluxul vectorului

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

prin suprafața S definită de ecuația $z = f(x,y)$, prin proiecția pe planul xy, nu este necesar să determinăm vectorul unitate $\vec{n}^0$ normal la suprafață. În locul acestuia este suficient vectorul normal:

$$\vec{n} = \pm grad\left[z - f(x,y)\right] = \pm\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}\right)$$

Formula de calcul a fluxului devine:

$$\Phi = \iint_S \left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left(\vec{a},\vec{n}^0\right)\Big|_{z=f(x,y)} \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left(\vec{a},\vec{n}\right)\Big|_{z=f(x,y)} dxdy = \pm\iint_{D_{xy}}\left(-P\left(x,y,f(x,y)\right)\frac{\partial f}{\partial x} - Q\left(x,y,f(x,y)\right)\frac{\partial f}{\partial y} + R\left(x,y,f(x,y)\right)\right)dxdy$$

Exemplu:
Calculați fluxul vectorului $\vec{a} = xz\vec{i}$ prin fața externă a paraboloidului $z = 1 - x^2 - y^2$ mărginit de planul $z = 0$ $(z \geq 0)$.

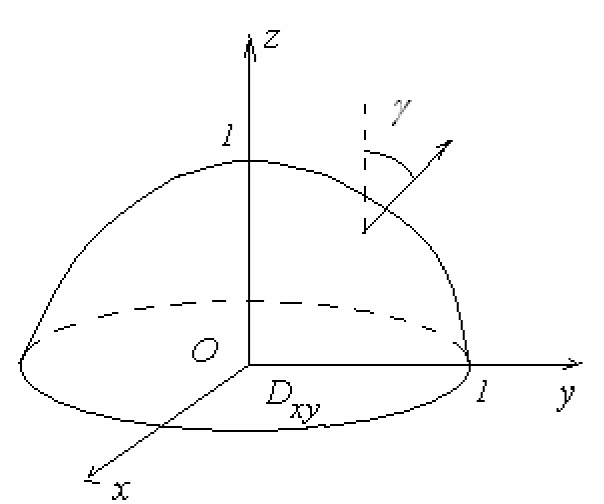


Figura 9.15

$$\vec{n} = grad\left(z - 1 + x^2 + y^2\right) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

$$\left(\vec{a},\vec{n}\right)\Big|_{z=f(x,y)} = 2x^2\left(1-x^2-y^2\right)$$

$$\Phi = \iint\limits_{D_{xy}} 2x^2\left(1-x^2-y^2\right)dxdy$$

Datorită simetriei domeniului D_{xy}, transformăm integrala în coordonate polare.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{matrix} \rho : 0 \to 1 \\ \varphi : 0 \to 2\pi \end{matrix}$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 2\rho^2\cos^2\varphi\left(1-\rho^2\right)\rho d\rho = \int_0^{2\pi} 2\cos^2\varphi d\varphi \int_0^1 \rho^3\left(1-\rho^2\right)d\rho$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi \left(\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\varphi\Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin 2\varphi}{2}\Bigg|_0^{2\pi}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = 2\pi\frac{1}{12} = \frac{\pi}{6}$$

- **Proiecția pe trei plane de coordonate**

Fie S o suprafață proiectabilă în mod unic pe cele trei plane de coordonate. Notăm cu D_{xy}, D_{xz} şi D_{yz} proiecțiile lui S pe planele xy, xz şi yz respectiv.
Ecuația $F(x,y,z)=0$ care defineşte suprafața S este rezolvabilă în mod unic, în fiecare argument, adică există

$$x = f_1(y,z), \quad y = f_2(x,z), \quad z = f_3(x,y)$$

Fluxul vectorului

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

prin suprafața S a cărui vector unitate normal este

$$\vec{n}^0 = \cos\alpha\ \vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\ \vec{k}$$

poate fi scris astfel:

$$\Phi = \iint\limits_S \left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma = \iint\limits_S \left[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right]d\sigma$$

Avem în vedere că:

$$\begin{cases} d\sigma\cos\alpha = \pm dydz \\ d\sigma\cos\beta = \pm dxdz \\ d\sigma\cos\gamma = \pm dxdy \end{cases}$$

cu semnul fiecărei formule ales în corespondență cu semnul lui $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, pe suprafața *S*, fluxul devine:

$$\Phi = \pm\iint_{D_{yz}} P\left[f_1(y,z),y,z\right]dydz \pm \iint_{D_{xz}} Q\left[x,f_2(x,z),z\right]dxdz \pm \iint_{D_{xy}} R\left[x,y,f_3(x,y)\right]dxdy$$

Exemplu:
Calculați fluxul câmpului vectorial $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ prin triunghiul din planul $x+y+z=l$, $l>0$, tăiat de planele $x=0$, $y=0$, $z=0$ (unghiul γ este ascuțit).

$$\vec{n}^0 = \frac{grad\left(z+x+y-l\right)}{\left|grad\left(z+x+y-l\right)\right|} = \frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}$$

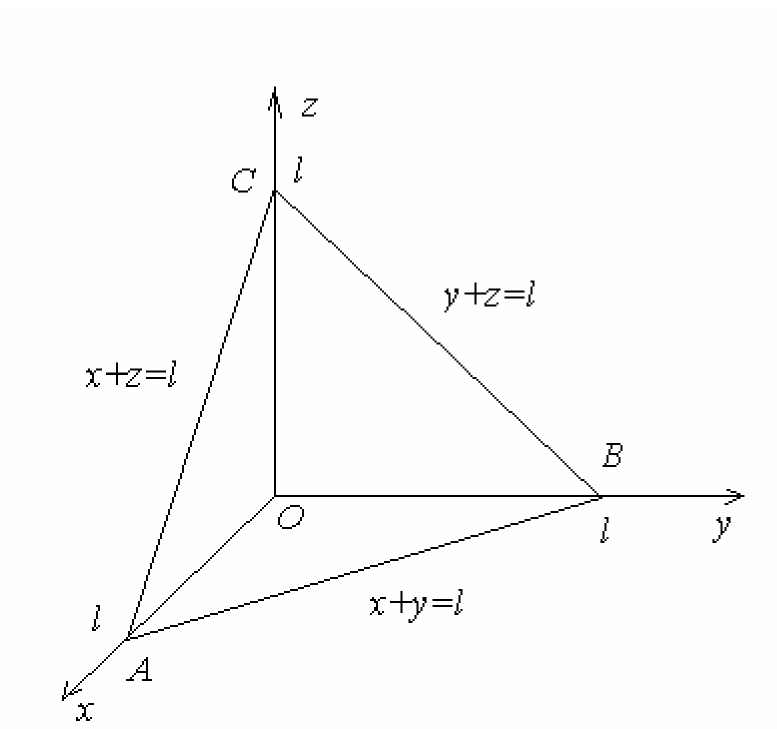


Figura 9.16

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$$

Toate integralele din formula fluxului se iau cu plus.

$$\Phi = \iint_{D_{yz}} y dy dz + \iint_{D_{xz}} z dx dz + \iint_{D_{xy}} x dx dy$$

$$\iint_{D_{yz}} y dy dz = \int_0^l dy \int_0^{l-y} y dz = \int_0^l y(l-y) dy = \left(l\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^l = l^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{l^3}{6}$$

$$\iint_{D_{xz}} z dx dz = \int_0^l dx \int_0^{l-x} z dz = \int_0^l \frac{(l-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2}\left(l^2 x - 2l\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^l = \frac{l^3}{6}$$

$$\iint_{D_{xy}} x dx dy = \int_0^l dx \int_0^{l-x} x dy = \int_0^l x(l-x) dx = \left(l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^l = l^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{l^3}{6}$$

$$\Phi = \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{6} = \frac{l^3}{2}$$

9.6 Fluxul unui câmp vectorial printr-o suprafață închisă

Teoremă: Dacă într-un domeniu $G \subset \mathbb{R}^3$, componentele câmpului vectorial

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k} \qquad (1)$$

sunt continue și au derivatele parțiale $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ continue, atunci fluxul câmpului vectorial $\vec{a}$ prin orice suprafață închisă *S*, netedă pe porțiuni, din domeniul *G*, este egal cu integrala triplă a funcției $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ pe domeniul *V* mărginit de suprafața *S*:

$$\Phi = \oiint_S \left(\vec{a}, \vec{n}^0 \right) d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \qquad (2)$$

Aceasta este *formula Gauss-Ostrogradsky*. Aici $\vec{n}^0$ este vectorul unitate al normalei exterioare la suprafaţa S şi $\oiint\limits_S$ notează fluxul printr-o suprafaţă închisă.

Exemple:

1. Determinaţi fluxul vectorului $\vec{a} = 2x\vec{i} - (z-1)\vec{k}$ prin suprafaţa închisă:

$$S : \left\{x^2 + y^2 = 4,\ z = 0,\ z = 1\right\}$$

prin definiţie şi cu formula Gauss-Ostrogradsky.

- Cu definiţia:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

$$\Phi_1 = \iint\limits_{S_1} \left(\vec{a}, \vec{n}_1^0\right) d\sigma = \iint\limits_{S_1} (z-1)\, d\sigma = -\iint\limits_{S_1} d\sigma = -\pi R^2 = -4\pi$$

$$\Phi_2 = \iint\limits_{S_2} \left(\vec{a}, \vec{n}_2^0\right) d\sigma = -\iint\limits_{S_2} (z-1)\, d\sigma = 0$$

$$\vec{n}_3^0 = \frac{grad\left(x^2+y^2-4\right)}{\left|grad\left(x^2+y^2-4\right)\right|} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j}}{\sqrt{4x^2+4y^2}} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{2}$$

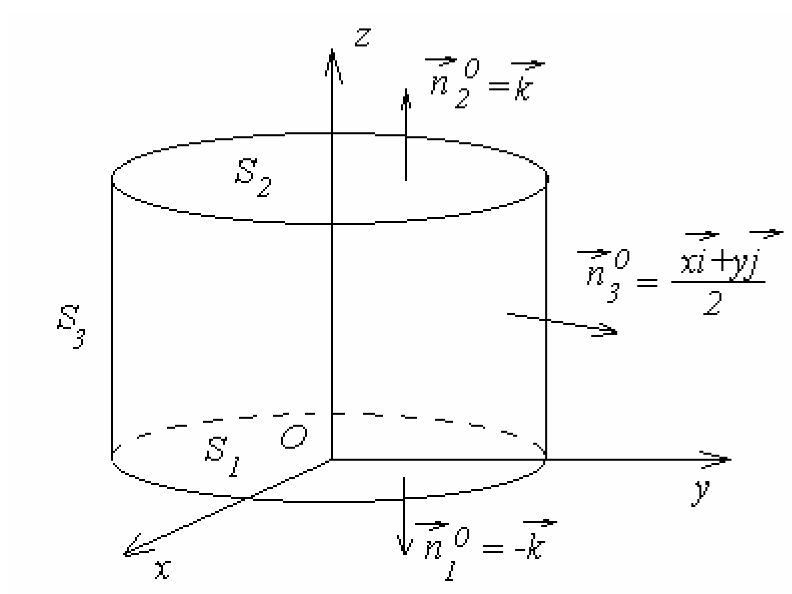


Figura 9.17

$$\Phi_3 = \iint_{S_3} \left(\vec{a}, \vec{n}_3^0\right) d\sigma = \iint_{S_3} x^2 d\sigma$$

Având în vedere simetria suprafeței, vom folosim coordonate cilindrice:

$$\begin{cases} x = 2\cos\varphi \\ y = 2\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad d\sigma = 2d\varphi dz$$

$$\Phi_3 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 4\cos^2\varphi 2dz = 4\int_0^{2\pi} \left(1 + \cos 2\varphi\right) d\varphi = 8\pi$$

$$\Phi = -4\pi + 0 + 8\pi = 4\pi$$

- Cu Gauss-Ostrogradsky:

$$\Phi = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \iiint_V \left(2 + 0 - 1\right) dV = \iiint_V dV = 4\pi$$

2. Determinați fluxul vectorului $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ prin sfera de rază R şi centru originea sistemului de coordonate prin definiție şi cu formula Gauss-Ostrogradsky.

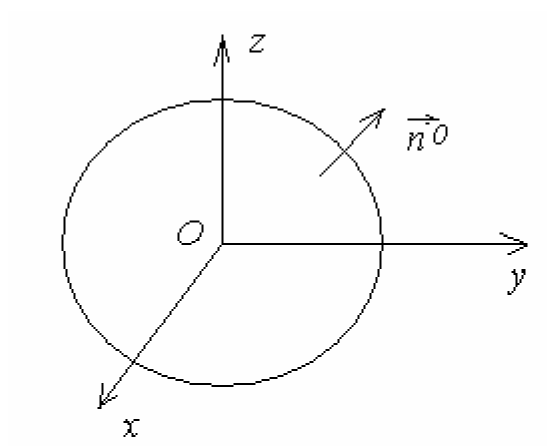


Figura 9.18

- Cu definiția:

$\vec{n}^0$ este vectorul unitate normal la sferă

$$\vec{n}^0 = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{R} = \frac{\vec{r}}{R}$$

$$\left(\vec{r},\vec{n}^0\right) = \left(\vec{r},\frac{\vec{r}}{R}\right) = \frac{R^2}{R} = R = ct$$

$$\Phi = \oiint_{S_R} \left(\vec{r},\vec{n}^0\right) d\sigma = R\oiint_{S_R} d\sigma = R4\pi R^2 = 4\pi R^3$$

- Cu Gauss-Ostrogradsky:

$$\Phi = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \iiint_V (1+1+1)\, dV = 3\iiint_V dV = 3\frac{4\pi R^3}{3} = 4\pi R^3$$

3. Determinați fluxul vectorului $\vec{a} = 3x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$ prin prin suprafața închisă:

$$S: \begin{cases} z = 9 - x^2 - y^2 \\ z = 0 \quad (z > 0) \end{cases}$$

prin definiție şi cu formula Gauss-Ostrogradsky.

- Cu definiția:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

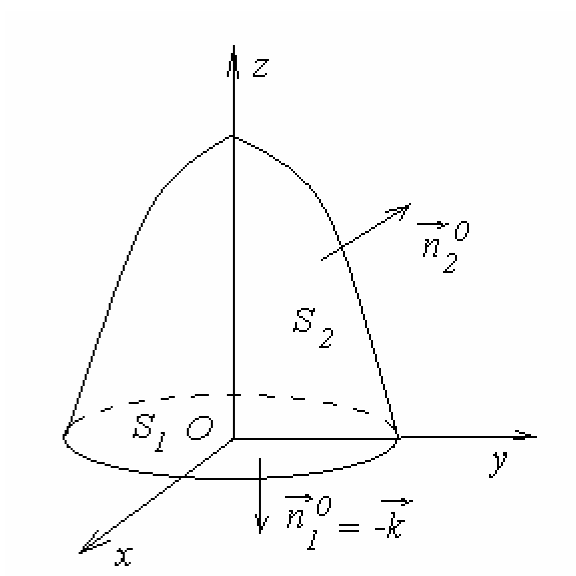


Figura 9.19

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \left(\vec{a}, \vec{n}_1^0\right) d\sigma = \iint_{S_1} z d\sigma = 0$$

$$\vec{n}_2 = grad\left(z + x^2 + y^2 - 9\right) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} \left(\vec{a}, \vec{n}_2^0\right) d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left(\vec{a}, \vec{n}_2\right)\Big|_{z=f(x,y)} dxdy$$

$$\left(\vec{a}, \vec{n}_2\right)\Big|_{z=9-x^2-y^2} = \left(6x^2 - 2y^2 - z\right)\Big|_{z=9-x^2-y^2} = 7x^2 - y^2 - 9$$

Având în vedere simetria suprafeței, vom folosim coordonate polare:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \rho: 0 \to 3 \\ \varphi: 0 \to 2\pi \end{array}$$

$$\Phi_2 = \iint_{D_{xy}} \left(\vec{a}, \vec{n}_2\right)\Big|_{z=f(x,y)} dxdy = \iint_{D_{xy}} \left(7x^2 - y^2 - 9\right) dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \left(7\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi - 9\right)\rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \left(8\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2 - 9\right)\rho d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(8\frac{\rho^4}{4}\cos^2\varphi - \frac{\rho^4}{4} - 9\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(162\cos^2\varphi - \frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(81 + 81\cos 2\varphi - \frac{243}{4}\right) d\varphi = \frac{81}{4} 2\pi = \frac{81}{2}\pi$$

- Cu Gauss-Ostrogradsky:

$$\Phi = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \iiint_V \left(3 - 1 - 1\right) dV = \iiint_V dV$$

Având în vedere simetria suprafeței, vom folosim coordonate cilindrice:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad dV = \rho d\rho d\varphi dz \qquad \begin{array}{c} \rho: 0 \to 3 \\ \varphi: 0 \to 2\pi \\ z: 0 \to 9 - \rho^2 \end{array}$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho d\rho \int_0^{9-\rho^2} dz = 2\pi \int_0^3 \rho\left(9-\rho^2\right) d\rho = 2\pi \left(9\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^3 = 2\pi\left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) = \frac{81}{2}\pi$$

Remarcă: Când suprafața *S* este deschisă, adesea este convenabil să închidem suprafața şi să utilizăm formula Gauss-Ostrogradsky.

Exemplu:

Determinați fluxul vectorului $\vec{a} = \left(y^2 + z^2\right)\vec{i} - y^2\vec{j} + 2yz\vec{k}$ prin suprafața $S : x^2 + z^2 = y^2$, $\left(0 \le y \le 1\right)$.

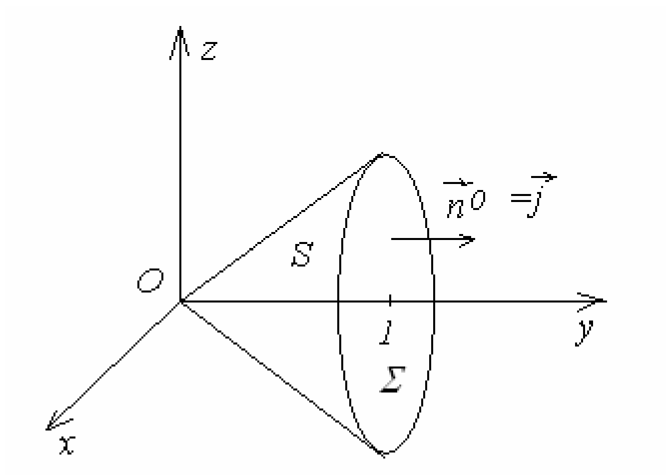


Figura 9.20

Suprafața *S* reprezintă un con cu axa *Oy*. Închidem conul cu discul Σ din planul $y = 1$.

Notații: Φ_1 fluxul necunoscut

Φ_2 fluxul prin Σ

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \iiint_V \left(0 - 2y + 2y\right) dV = 0$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_1 = -\Phi_2$$

$$\Phi_2 = \iint_\Sigma \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma = \iint_\Sigma \left(\vec{a}, \vec{j}\right) d\sigma = \iint_\Sigma \left(-y^2\right) d\sigma = -\iint_\Sigma d\sigma = -\pi$$

$$\Phi_1 = -\Phi_2 = \pi$$

9.7 Divergența unui câmp vectorial

Considerăm câmpul vectorial al vitezelor dintr-un fluid în mişcare. Fie *S* o suprafață închisă în fluid.

- Dacă fluxul prin *S* este *pozitiv*, aceasta sugerează că pentru spațiul mărginit de *S*, ieşirea de fluid este mai mare decât intrarea. Spunem că există *surse* în *S* care generează fluid.
- Dacă fluxul prin *S* este *negativ*, intrarea este mai mare decât ieşirea. Spunem că există *absorbție* în *S* pentru fluid.

În consecință, cantitatea:

$$\Phi = \oiint_S \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma \tag{3}$$

caracterizează natura câmpului vectorial din interiorul suprafeței *S*, anume prezența punctelor sursă şi absorbție de câmp în interiorul lui *S*. Conceptul de *flux* al unui vector printr-o suprafață închisă conduce la noțiunea de *divergență* a câmpului. Divergența unui câmp vectorial este o funcție scalară care asociază un număr fiecărui punct din câmp.

Fie *M* un punct dat din câmp. Închidem punctul cu o suprafață arbitrară *S*, de exemplu o sferă cu o rază suficient de mică. Notăm cu (*V*) domeniul mărginit de *S* şi cu *V* volumul acestuia.
Fluxul vectorului $\vec{a}$ prin *S* este:

$$\Phi = \oiint_S \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma \tag{4}$$

Considerăm raportul:

$$\frac{\oiint_S \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma}{V} \tag{5}$$

Deoarece numărătorul ne indică generarea realizată de sursele din (*V*), atunci raportul (5) ne indică generarea medie din unitatea de volum sau cantitatea de surse pe unitatea de volum.

Definiție: Dacă raportul (5) are limită finită atunci când (*V*) se reduce la punctul *M*, atunci această limită defineşte *divergența câmpului vectorial* $\vec{a}$ în punctul *M* şi se notează $div\ \vec{a}(M)$:

$$div\ \vec{a}(M) = \lim_{(V)\to M} \frac{\oiint_S \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma}{V} \tag{6}$$

Dacă $div\, \vec{a}(M) > 0$, atunci în punctul *M* avem o sursă de câmp.

Dacă $div\, \vec{a}(M) < 0$, atunci în punctul *M* avem un punct de absorbție de câmp.

Observație: Conform definiției, divergența unui câmp vectorial $\vec{a}$ în punctul *M* este o densitate volumică a fluxului cîmpului vectorial $\vec{a}$ în acel punct.

- **Metodă de calcul a divergenței în coordonate carteziene**

Fie câmpul vectorial:

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k} \tag{7}$$

cu componentele funcții continue care au derivate parțiale $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ continue pe o vecinătate a punctului *M*.

Aplicăm teorema Gauss-Ostrogradsky fluxului câmpului $\vec{a}$ prin orice suprafață închisă *S* din vecinătatea lui *M*, care conține punctul *M*:

$$\oiint_S (\vec{a}, \vec{n}^0)\, d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \tag{8}$$

Integralei triple din dreapta îi aplicăm teorema de medie:

$$\oiint_S (\vec{a}, \vec{n}^0)\, d\sigma = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{M_m} V \tag{9}$$

Substituim această relație în definiția (6):

$$div\, \vec{a}(M) = \lim_{(V)\to M} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{M_m} \tag{10}$$

Când (*V*) se reduce la punctul *M* şi $M_m \to M$, şi cu ipoteza de continuitate a derivatelor parțiale, avem:

$$div\, \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_M \tag{11}$$

$$div\, \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{12}$$

Toate cantitățile din formula (12) se calculează în acelaşi punct.

Formula Gauss-Ostrogradsky poate fi rescrisă:

$$\oiint_S \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma = \iiint_V div\ \vec{a}\ dV \tag{13}$$

- **Reguli de calcul pentru divergență**

1. *Liniaritate*

$$div\left(C_1\vec{a}_1 + C_2\vec{a}_2 + \ldots + C_n\vec{a}_n\right) = C_1 div\ \vec{a}_1 + C_2 div\ \vec{a}_2 + \ldots + C_n div\ \vec{a}_n \tag{14}$$

unde C_1, C_2, ..., C_n sunt constante.

2. Divergența unui vector constant $\vec{c}$ este nulă.

$$div\ \vec{c} = 0 \tag{15}$$

3. Divergența produsului unei funcții scalare $u(M)$ cu un vector $\vec{a}(M)$:

$$div\left(u\vec{a}\right) = u\ div\ \vec{a} + \left(grad\ u, \vec{a}\right) \tag{16}$$

Într-adevăr, dacă $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, atunci

$$div(u\vec{a}) = div\left(uP\vec{i} + uQ\vec{j} + uR\vec{k}\right) = \frac{\partial(uP)}{\partial x} + \frac{\partial(uQ)}{\partial y} + \frac{\partial(uR)}{\partial z}$$

$$= u\frac{\partial P}{\partial x} + u\frac{\partial Q}{\partial y} + u\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}P + \frac{\partial u}{\partial y}Q + \frac{\partial u}{\partial z}R$$

$$= u\ div\ \vec{a} + \left(grad\ u, \vec{a}\right)$$

Exemplu:
Calculați divergența vectorului:

$$\vec{a} = \varphi(r)\vec{r}^{\,0} = \varphi(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

unde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ şi $r = |\vec{r}|$ este distanța de la origine la un punct arbitrar $M(x, y, z)$.

$$div\ \vec{a} = div\left(\frac{\varphi(r)}{r}\vec{r}\right) = \frac{\varphi(r)}{r} div\ \vec{r} + \left(grad\,\frac{\varphi(r)}{r}, \vec{r}\right)$$

$$div\ \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$grad\,\frac{\varphi(r)}{r} = \left(\frac{\varphi(r)}{r}\right)'\, grad\ r = \frac{r\varphi'(r) - \varphi(r)}{r^2}\vec{r}^{\,0}$$

$$\left(grad\,\frac{\varphi(r)}{r}, \vec{r}\right) = \left(\frac{r\varphi'(r) - \varphi(r)}{r^2}\vec{r}^{\,0}, \vec{r}\right) = \frac{r\varphi'(r) - \varphi(r)}{r} = \varphi'(r) - \frac{\varphi(r)}{r}$$

$$div\ \vec{a} = 3\frac{\varphi(r)}{r} + \varphi'(r) - \frac{\varphi(r)}{r} = 2\frac{\varphi(r)}{r} + \varphi'(r)$$

Definiție: Dacă în toate punctele unui domeniu $G \subset R^3$, divergența unui câmp vectorial $\vec{a}$ definit pe *G*, este nulă, adică:

$$div\ \vec{a} = 0 \tag{17}$$

atunci câmpul se numeşte *solenoidal* pe domeniul *G*.

Observație: În câmp solenoidal, fluxul câmpului vectorial prin orice suprafață închisă *S* din câmp, este nul

$$\oiint_S \left(\vec{a}, \vec{n}^{\,0}\right) d\sigma = 0 \tag{18}$$

- **Proprietățile unui câmp solenoidal (fără surse)**

Fie Σ o suprafață plană în câmpul vectorial $\vec{a}$ şi fie γ frontiera lui Σ, adică $\gamma = \partial\Sigma$. Totalitatea liniilor de câmp care trec prin frontiera γ formează un *tub vectorial*. Considerăm o secțiune arbitrară a tubului Σ_1. Normala $\vec{n}_1$ la Σ_1 este orientată în direcția câmpului $\vec{a}$.

Teorema1: Într-un câmp solenoidal $\vec{a}$, fluxul vectorului $\vec{a}$ prin orice secțiune a unui tub vectorial este acelaşi.

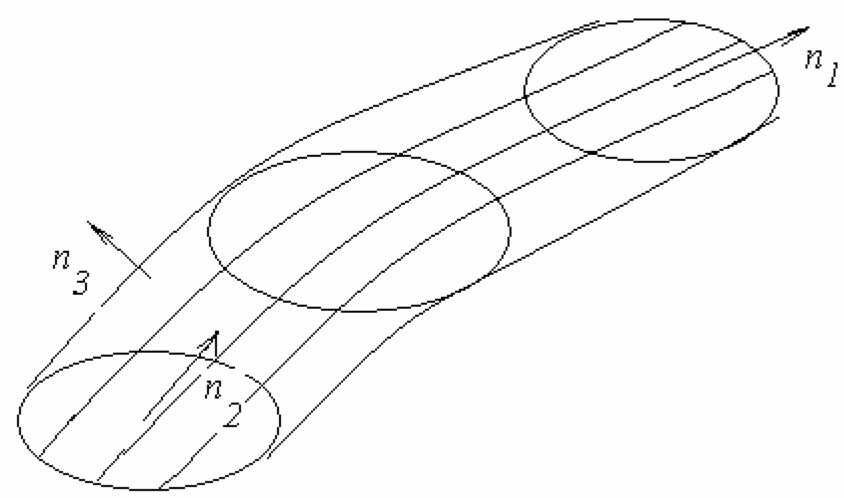


Figura 9.21

Demonstrație: Fie Σ_1 şi Σ_2 două secțiuni arbitrare, care nu se intersectează, ale aceluiaşi tub vectorial. Trebuie să arătăm că:

$$\iint_{\Sigma_1} \left(\vec{a}, \vec{n}_1^0\right) d\sigma = \iint_{\Sigma_2} \left(\vec{a}, \vec{n}_2^0\right) d\sigma \tag{19}$$

Notăm cu Σ_3 suprafața laterală a tubului, cuprinsă între cele două secțiuni arbitrare. Cele trei suprafețe Σ_1, Σ_2 şi Σ_3 formează împreună o suprafață închisă $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$. Deoarece câmpul $\vec{a}$ este presupus solenoidal, avem:

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma = 0$$

Cu proprietatea de aditivitate a fluxului, putem scrie:

$$\iint_{\Sigma_1} \left(\vec{a}, \vec{n}_1^0\right) d\sigma + \iint_{\Sigma_2} \left(\vec{a}, -\vec{n}_2^0\right) d\sigma + \iint_{\Sigma_3} \left(\vec{a}, \vec{n}_3^0\right) d\sigma = 0$$

Pe suprafața Σ_3, care este formată din linii de câmp, avem $\vec{n}_3^0 \perp \vec{a}$. Atunci, $\left(\vec{a}, \vec{n}_3^0\right) = 0$ pe suprafața Σ_3, şi astfel ultima integrală este nulă. Deci,

$$\iint_{\Sigma_1} \left(\vec{a}, \vec{n}_1^0\right) d\sigma = \iint_{\Sigma_2} \left(\vec{a}, \vec{n}_2^0\right) d\sigma$$

Fie L un contur închis, orientat, care este frontiera suprafeței Σ. Vom spune că L este *bordul orientat* al suprafeței Σ.

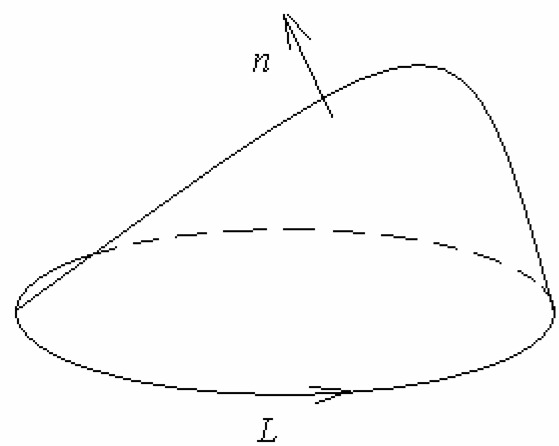


Figura 9.22

Considerăm vectorul normal $\vec{n}$ la Σ astfel încât să existe o legătură directă între $\vec{n}$ şi parcurgerea bordului L.

Teorema 2: Într-un câmp solenoidal $\vec{a}$, fluxul vectorului $\vec{a}$ prin orice suprafață care are acelaşi bord orientat este acelaşi, adică:

$$\iint_{\Sigma_1} \left(\vec{a}, \vec{n}_1^0\right) d\sigma = \iint_{\Sigma_2} \left(\vec{a}, \vec{n}_2^0\right) d\sigma \qquad (20)$$

Observație: Într-un câmp solenoidal liniile de câmp nu încep şi nu se termină în câmp. Acestea pot fi curbe închise sau deschise ce pot avea capetele pe frontiera domeniului pe care e definit câmpul.

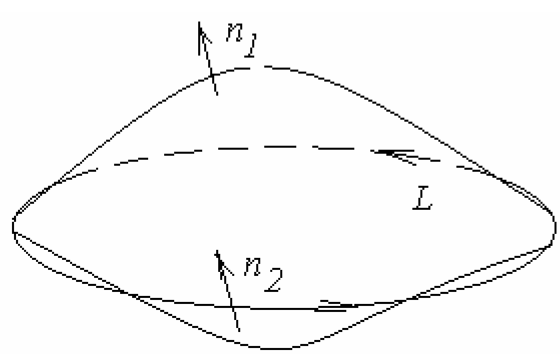


Figura 9.23

.

Exemplu:
Considerăm câmpul produs de o sarcină punctuală q plasată în originea sistemului de coordonate. Intensitatea câmpului este:

$$\vec{E} = \frac{q}{r^2}\vec{r}^{\,0}$$

$$div\ \vec{E} = div\left(\frac{q}{r^2}\vec{r}^{\,0}\right) = div\left(\frac{q}{r^3}\vec{r}\right)$$

unde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ şi $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Pentru $r \neq 0$ avem

$$div\left(\frac{q}{r^3}\vec{r}\right) = \frac{q}{r^3} div\ \vec{r} + \left(grad\ \frac{q}{r^3}, \vec{r}\right)$$
$$= 3\frac{q}{r^3} + \left(-3\frac{q}{r^4}\vec{r}^{\,0}, r\ \vec{r}^{\,0}\right) = 3\frac{q}{r^3} - 3\frac{q}{r^3} = 0$$

Câmpul $\vec{E}$ este solenoidal în orice domeniu G care nu conține punctul $O(0,0,0)$.
Fluxul câmpului $\vec{E}$ prin sfera S_R de rază R şi centru punctul $O(0,0,0)$ este:

$$\Phi = \oiint_{S_R} \left(\vec{E}, \vec{n}^{\,0}\right) d\sigma = \oiint_{S_R} \left(\frac{q}{r^2}\vec{r}^{\,0}, \vec{r}^{\,0}\right) d\sigma = \frac{q}{R^2} \oiint_{S_R} d\sigma = \frac{q}{R^2} 4\pi R^2$$
$$\Phi = 4\pi q$$

Fluxul câmpului $\vec{E}$ prin orice suprafață închisă care conține originea $O(0,0,0)$ este $4\pi q$.

9.8 Circulația unui câmp vectorial. Rotorul unui vector. Teorema Stokes

Considerăm un câmp vectorial continuu definit pe un domeniu $G \subset R^3$

$$\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k} \tag{1}$$

şi un contur orientat închis *L*.

Definiție: *Circulația* vectorului $\vec{a}$ pe un contur închis *L* este integrala curbilinie de al doilea tip a lui $\vec{a}$ pe conturul *L*, adică

$$\text{Circulația } = \oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \oint_L (Pdx + Qdy + Rdz) \tag{2}$$

În (2), $d\vec{r}$ este un vector cu mărimea egală cu diferențiala arcului *L* şi cu direcția tangentă la conturul *L*. Aceste caracteristici depind de orientarea lui *L*.

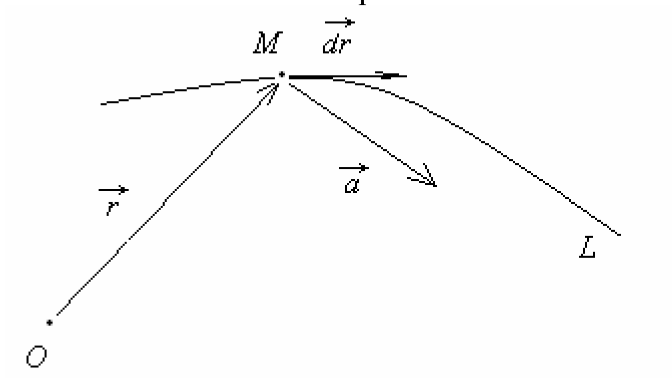


Figura 9.25

Exemplu:

Calculați circulația câmpului vectorial $\vec{a} = -y^3\vec{i} + x^3\vec{j}$ pe elipsa $L: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

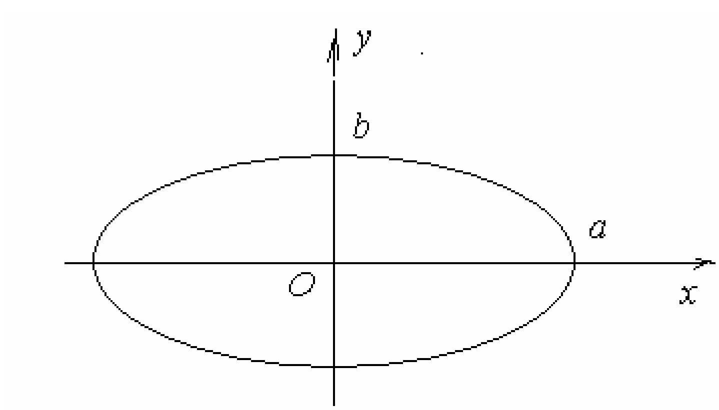


Figura 9.26

$$\oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \oint_L -y^3 dx + x^3 dy$$

$$L: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi] \qquad \begin{matrix} dx = -a\sin t\ dt \\ dy = b\cos t\ dt \end{matrix}$$

$$\oint_L -y^3 dx + x^3 dy = \int_0^{2\pi} \left(b^3 \sin^3 t(-a\sin t) + a^3 \cos^3 t\ b\cos t \right) dt$$

$$= ab \int_0^{2\pi} \left(b^2 \sin^4 t + a^2 \cos^4 t \right) dt$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^4 t\ dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos 2t}{2} \right)^2 dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t \right) dt =$$

$$\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2} \right) dt = \frac{1}{4} \left(t - 2\frac{\sin 2t}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\frac{\sin 4t}{4} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} 2\pi = \frac{3}{4}\pi$$

Analog, $\int_0^{2\pi} \cos^4 t\ dt = \frac{3}{4}\pi$

$$\text{Circulatia} = ab\left(b^2 \frac{3}{4}\pi + a^2 \frac{3}{4}\pi \right) = ab\frac{3}{4}\pi\left(a^2 + b^2 \right)$$

- **Rotorul câmpului vectorial**

Fie câmpul vectorial:

$$\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

Presupunem că componentele P, Q şi R ale câmpului sunt continue şi au derivate parțiale continue în toate argumentele.

Definiția 1: *Rotorul* unui vector $\vec{a}(M)$ este vectorul notat $rot\ \vec{a}$ şi definit prin:

$$rot\ \vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\vec{k} \qquad (3)$$

sau în notația scurtă:

$$rot\ \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \tag{4}$$

Exemplu:

Calculați rotorul câmpului vectorial $\vec{a} = -\frac{y^2}{2}\vec{i} + \frac{x^2}{2}\vec{j}$

$$rot\ \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y^2}{2} & \frac{x^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y^2}{2}\right)\right)\vec{k}$$

$$rot\ \vec{a} = \left(x + y\right)\vec{k}$$

Definiția 2: Dacă pe un domeniu *G* câmpul vectorial $\vec{a}$ satisface condiția $rot\ \vec{a} = 0$, atunci câmpul se numeşte *irotațional* pe domeniul *G*.

Obsevație: Deoarece prin definiție $rot\ \vec{a}$ este un vector, atunci se poate considera câmpul vectorial $rot\ \vec{a}$.
Dacă componentele câmpului $\vec{a}$ au derivate parțiale continue de ordinul doi, atunci putem calcula divergența câmpului vectorial $rot\ \vec{a}$. Astfel,

$$\begin{aligned} div\left(rot\ \vec{a}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y} = 0 \end{aligned}$$

$$div\left(rot\ \vec{a}\right) = 0 \tag{5}$$

In concluzie, câmpul $rot\ \vec{a}$ este un cîmp *solenoidal*.

Teorema Stokes: Circulația unui vector $\vec{a}$ pe un contur închis orientat *L*, este egală cu fluxul vectorului *rot* $\vec{a}$ prin orice suprafață Σ care are bordul orientat *L*.

$$\oint_L \left(\vec{a}, d\vec{r}\right) = \iint_\Sigma \left(rot\ \vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma \qquad (6)$$

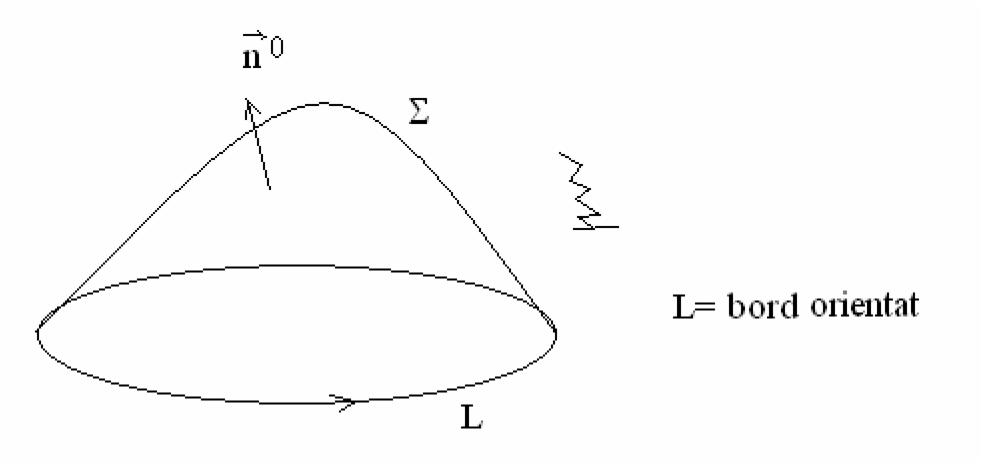


Figura 9.27

Observație: Pentru validitatea teoremei se presupune că componentele câmpului $\vec{a}$ au derivate parțiale continue pe un domeniu *G* şi că orientarea vectorului normal unitar $\vec{n}^0$ la suprafața Σ din *G* este în concordanță cu orientarea conturului *L*.

Observație: Întrucât $rot\ \vec{a}$ este un câmp solenoidal, $div\left(rot\ \vec{a}\right) = 0$, atunci fluxul lui $rot\ \vec{a}$ este independent de suprafața Σ cu bordul orientat *L*.

Exemplu:
Calculați circulația vectorului $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + \vec{k}$ de-a lungul conturului

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = H \end{cases}, \qquad H > 0$$

Utilizând: (1) definiția
(2) teorema Stokes

$$L = \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = H \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi] \qquad \begin{array}{c} dx = -R\sin t\ dt \\ dy = R\cos t\ dt \\ dz = 0 \end{array}$$

$$\oint_L \left(\vec{a}, d\vec{r}\right) = \oint_L ydx - xdy + dz = \int_0^{2\pi} \left(R\sin t(-1)R\sin t - R\cos t R\cos t\right) dt$$

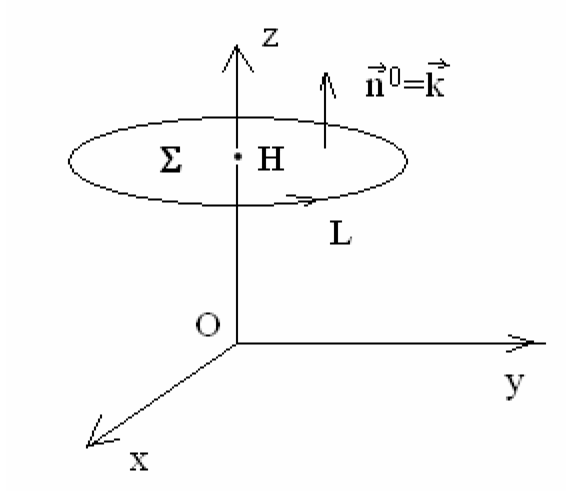


Figura 9.28

$$= -\int_0^{2\pi}\left(R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t\right)dt = -R^2\int_0^{2\pi} dt = -2\pi R^2$$

$$rot\ \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(-x) - \frac{\partial}{\partial y}(y)\right)\vec{k} = -2\vec{k}$$

$$\oint_L\left(\vec{a}, d\vec{r}\right) \overset{T.S.}{=} \iint_\Sigma\left(rot\ \vec{a}, \vec{n}^0\right)d\sigma = \iint_\Sigma\left(-2\vec{k}, \vec{k}\right)d\sigma = -2\iint_\Sigma d\sigma = -2\pi R^2$$

- **Definiția invariantă a rotorului unui câmp vectorial**

Din teorema Stokes putem determina o definiție a rotorului care să fie independentă de sistemul de coordonate.

Teoremă: Proiecția lui $rot\ \vec{a}$ pe orice direcție este independentă de alegerea sistemului de coordonate şi este egală cu densitatea de suprafață a circulației lui $\vec{a}$ pe conturul unei arii perpendiculare pe direcția de proiecție a rotorului. Mai mult,

$$pr_{\vec{n}} rot\ \vec{a}\Big|_M = \left(rot\ \vec{a}, \vec{n}^0\right)\Big|_M = \lim_{(\Sigma)\to M}\frac{\oint_L\left(\vec{a}, d\vec{r}\right)}{S} \qquad (7)$$

În acest enunț, Σ este o suprafață plană perpendiculară pe $\vec{n}$, S este aria suprafeței Σ, L este conturul orientat al acestei suprafețe în acord cu $\vec{n}$. $(\Sigma) \to M$ înseamnă că suprafața (Σ) se reduce la punctul M în care este evaluat $rot\ \vec{a}$.

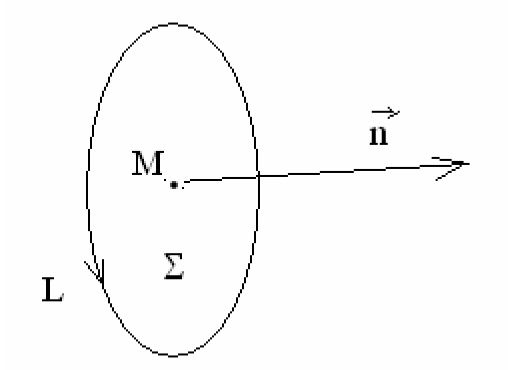


Figura 9.29

Într-adevăr,

$$\oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) \overset{T.S.}{=} \iint_\Sigma (rot\ \vec{a}, \vec{n}^0) d\sigma \overset{T.M.}{=} (rot\ \vec{a}, \vec{n}^0)\Big|_{M_m} \cdot S \qquad (8)$$

$$\lim_{(\Sigma)\to M} \frac{\oint_L (\vec{a}, d\vec{r})}{S} = \lim_{(\Sigma)\to M} (rot\ \vec{a}, \vec{n}^0)\Big|_{M_m} \overset{cont}{=} (rot\ \vec{a}, \vec{n}^0)\Big|_M \qquad (9)$$

Deoarece proiecția lui $rot\ \vec{a}$ pe o direcție arbitrară $\vec{n}$, este independentă de alegerea sistemului de coordonate, atunci şi vectorul $rot\ \vec{a}$ este invariant la alegerea sistemului de coordonate.

Definiție: Rotorul unui câmp vectorial $rot\ \vec{a}$ este un vector cu *mărimea* egală cu cea mai mare densitate de suprafață a circulației câmpului într-un punct dat, cu *direcția* perpendiculară pe drumul pe care se realizează cea mai mare densitate a circulației şi *sensul* vectorului $rot\ \vec{a}$ este în concordanță cu orientarea conturului de integrare.

- **Interpretare fizică a rotorului unui câmp vectorial**

Considerăm un corp solid care se roteşte în jurul axei sale fixe l cu viteza unghiulară ω. Presupunem că axa l coincide cu axa Oz a sistemului de coordonate.

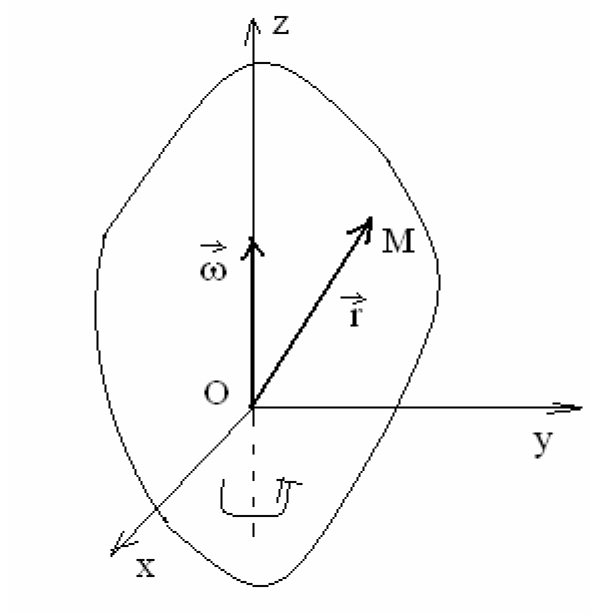


Figura 9.30

Fie *M* un punct arbitrar al corpului solid, definit prin vectorul de poziție:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{10}$$

Vectorul viteză unghiulară este $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$. Vectorul viteză liniară $\vec{v}$ al punctului *M* este:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j} \tag{11}$$

Calculăm rotorul câmpului de viteze liniare în corpul solid:

$$rot\ \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(x\omega)}{\partial x} + \frac{\partial(y\omega)}{\partial y} \right)\vec{k} = 2\omega\vec{k} \tag{12}$$

În concluzie,

$$rot\ \vec{v} = 2\vec{\omega} \tag{13}$$

adică rotorul câmpului de viteze al unui solid în rotație este același în toate punctele câmpului, și anume este paralel cu axa de rotație și egal cu dublul vitezei unghiulare de rotație a corpului.

- **Reguli de calcul pentru rotor**

1. Rotorul unui vector constant este nul:

$$rot\ \vec{c} = 0 \tag{14}$$

2. *Liniariate*

$$rot\left(C_1\vec{a}_1 + C_2\vec{a}_2 + \ldots C_n\vec{a}_n\right) = C_1 rot\ \vec{a}_1 + C_2 rot\ \vec{a}_2 + \ldots + C_n rot\ \vec{a}_n \tag{15}$$

3. Rotorul produsului unei funcții scalare $u(M)$ cu un vector $\vec{a}(M)$ este:

$$rot(u\vec{a}) = u\ rot\ \vec{a} + \left[grad\ u, \vec{a}\right] \tag{16}$$

Într-adevăr,

$$rot(u\vec{a}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ uP & uQ & uR \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(uR)}{\partial y} - \frac{\partial(uQ)}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial(uP)}{\partial z} - \frac{\partial(uR)}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial(uQ)}{\partial x} - \frac{\partial(uP)}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= u\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\right] +$$

$$+\left(R\frac{\partial u}{\partial y} - Q\frac{\partial u}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(P\frac{\partial u}{\partial z} - R\frac{\partial u}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(Q\frac{\partial u}{\partial x} - P\frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= u\ rot\ \vec{a} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = u\ rot\ \vec{a} + \left[grad\ u, \vec{a}\right]$$

9.9 Independența integralei curbilinii de drumul de integrare

Definiție: Un domeniu $G \subset \mathbb{R}^3$ este *simplu conex* dacă orice contur închis din domeniu poate fi bord pentru o suprafață din *G*.
De exemplu, interiorul unei sfere are această proprietate, iar interiorul unui tor nu.

Fie $G \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu simplu conex şi fie câmpul vectorial:

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} \tag{17}$$

cu componente continue pe *G*.

Teorema1: Condiția necesară şi suficientă pentru ca integrala curbilinie:

$$\int_{AB} (\vec{a}, d\vec{r}) \tag{18}$$

să fie independentă de drumul de integrare şi să depindă numai de punctul inițial *A* şi de punctul final *B*, este ca circulația lui $\vec{a}$ pe orice contur închis $L \subset G$ să fie nulă.

Teorema2: Dacă câmpul vectorial:

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} \tag{19}$$

este irotațional, adică $rot\ \vec{a} = 0$, atunci integrala curbilinie:

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \tag{20}$$

este independentă de drumul de integrare *L*.

Observație: Pentru valabilitatea teoremei se presupune că vectorul $\vec{a}$ are componentele *P*, *Q*, *R* cu derivate parțiale continue şi că domeniul lui $\vec{a}$ este simplu conex.

Caz particular: Câmpul vectorial este plan:

$$\vec{a} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} \tag{21}$$

$$rot\ \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\vec{k} \tag{22}$$

Teorema3: Pentru ca integrala curbilinie $\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ să fie independentă de drumul de integrare *L*, este necesar şi suficient să aibă loc:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \tag{23}$$

pe tot domeniul în cauză.

Observație: Dacă domeniul nu este simplu conex (fără găuri) atunci condiția $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ nu asigură independența integralei curbilinii de forma conturului de integrare.

Exemplu:

Fie câmpul vectorial: $\vec{a} = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$

Observație: Funcția vectorială nu este definită în $O(0,0)$. Excludem $O(0,0)$ din domeniu. În restul planului, care nu este simplu conex, componentele lui $\vec{a}$ sunt continue, au derivate parțiale continue şi au loc :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{1\cdot\left(x^2+y^2\right) - y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1\cdot\left(x^2+y^2\right) - x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$\text{deci } \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Calculăm integrala curbilinie pe o curbă închisă: $\oint_L \left(\vec{a}, d\vec{r}\right) = \oint_L \left(-\frac{ydx}{x^2+y^2} + \frac{xdy}{x^2+y^2}\right)$

Concret, *L* este un cercul:

$$L:\ \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \oint_L \left(-\frac{ydx}{x^2+y^2} + \frac{xdy}{x^2+y^2} \right) = \int_0^{2\pi} \frac{-R\sin t(-1)R\sin t + R\cos tR\cos t}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}{R^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

Faptul că circulația este nenulă indică o dependență de forma conturului de integrare a integralei curbilinii.

9.10 Câmp potențial

Definiție: Câmpul vectorial $\vec{a}(M)$ se numeşte *câmp potențial* dacă există o funcție scalară $u(M)$, astfel încât

$$grad\ u = \vec{a} \tag{24}$$

$u(M)$ se numeşte *potențialul câmpului* vectorial $\vec{a}$. Suprafețele sale de nivel se numesc şi suprafețe *echipotențiale*.

Fie

$$\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

şi deoarece prin definiție:

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \tag{25}$$

Relația vectorială (24) este echivalentă cu trei relații scalare:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y,z) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y,z) \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = R(x,y,z) \tag{26}$$

Observație: Potențialul unui câmp se determină numai până la o constantă. Într-adevăr, dacă

$$grad\ u = \vec{a} \qquad \text{şi} \qquad grad\ v = \vec{a} \tag{27}$$

atunci:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial z} \tag{28}$$

şi are loc $u=v+c$, $c=ct$.

Exemple:

1. Câmpul vectorului de poziție $\vec{r}$ este potențial. Într-adevăr,

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=grad\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)=grad\left(\frac{r^2}{2}\right)=r\cdot\vec{r}^{\,0} \tag{29}$$

Potențialul câmpului vectorului de poziție este $\frac{r^2}{2}+c$, unde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2. Câmpul vectorial $\vec{a}=f(r)\vec{r}$ este câmp potențial.

Pentru a arăta acest lucru trebuie să determinăm o funcție $\varphi(r)$ astfel încât să aibă loc:

$$f(r)\vec{r}=grad\ \varphi(r)$$
$$grad\ \varphi(r)=\varphi'(r)\vec{r}^{\,0}$$
$$f(r)r\ \vec{r}^{\,0}=\varphi'(r)\vec{r}^{\,0}$$
$$f(r)r=\varphi'(r)$$
$$f(r)r=\frac{d\varphi}{dr}$$
$$f(r)r\ dr=d\varphi$$
$$\varphi(r)=\int f(r)r\ dr+c$$ este potențialul căutat.

Teorema1: Dacă rot ā=0 şi dacă domeniul pe care e definit $\vec{a}$ este simplu conex, atunci câmp vectorial $\vec{a}$ este *potențial* sau *conservativ*. Aceasta presupune un câmp $\vec{a}$ cu componente continue şi cu derivate parțiale continue.

Demonstrație:
$\Rightarrow$ necesitate
Presupunem $\vec{a}=grad\ u$, atunci:

$$rot\ \vec{a}=rot(grad\ u)=rot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)\vec{k} = 0$$

deoarece derivatele mixte nu depind de ordinea de derivare.

$\Leftarrow$suficiență

Presupunem câmpul irotațional $rot\ \vec{a}=0$. Construim potențialul $u(M)$ al câmpului.

Deoarece $rot\ \vec{a}=0$, conform teoremei 2 din paragraful precedent, integrala curbilinie:

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) \tag{30}$$

este *independentă* de forma conturului *L*, şi depinde numai de punctul inițial şi final al conturului de integrare. Fixăm punctul inițial $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi lăsăm liber punctul final $M(x, y, z)$. Integrala curbilinie va fi o funcție de $M(x, y, z)$.

Notăm această funcție cu $u(M)$ şi demonstrăm că această funcție este potențialul câmpului căutat, adică demonstrăm că:

$$grad\ u = \vec{a} \tag{31}$$

Scriem integrala (30) fără să indicăm drumul *L* de integrare, dar precizăm în schimb, punctul inițial şi final:

$$u(M) = \int_{M_0}^{M} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz \tag{32}$$

Egalitatea $grad\ u = \vec{a}$ este echivalentă cu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y, z) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y, z) \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z) \tag{33}$$

Vom demonstra prima din aceste relații. În acest scop, calculăm derivata parțială implicată:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x} \tag{34}$$

Considerăm punctul $M_1(x+\Delta x, y, z)$ localizat în vecinătatea lui $M(x, y, z)$. Deoarece potențialul $u(M)$ este definit de integrala (32) care este independentă de conturul de integrare, alegem conturul de integrare din figură:

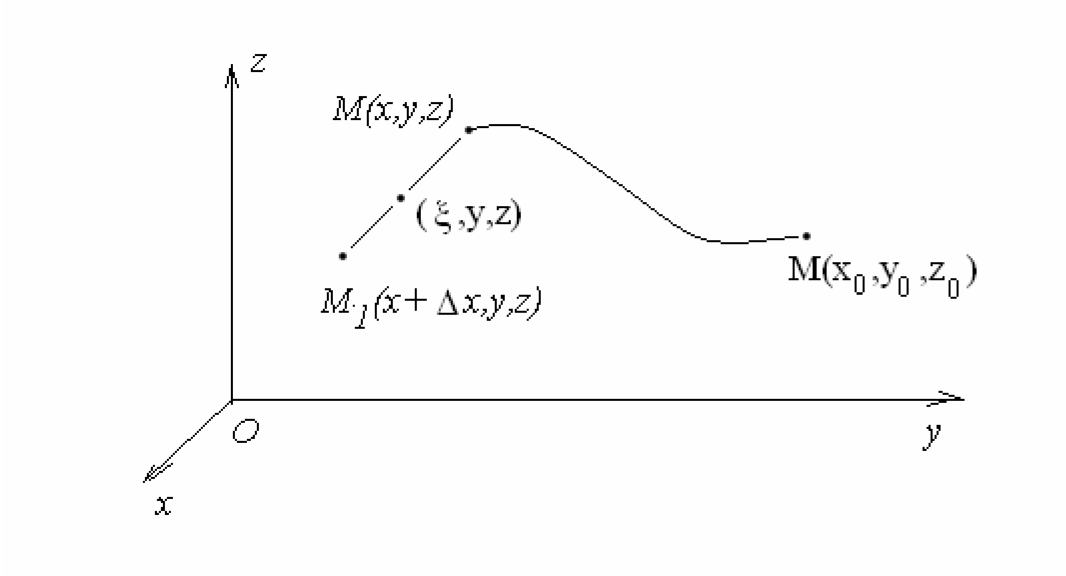


Figura 9.31

$$u(M_1) = \int_{M_0}^{M_1} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{M_0}^{M} (\vec{a}, d\vec{r}) + \int_{M}^{M_1} (\vec{a}, d\vec{r}) = u(M) + \int_{M}^{M_1} (\vec{a}, d\vec{r})$$

$$\Delta_x u = u(x+\Delta x, y, z) - u(x, y, z) = u(M_1) - u(M) = \int_{M}^{M_1} (\vec{a}, d\vec{r})$$

Ultima integrală se calculează pe segmentul MM_1, paralel cu axa *Ox*. Pe acest segment alegem ca parametru coordonata *x*:

$$\begin{array}{lll} x = x & dx = dx & \\ y = ct & dy = 0 & \\ z = ct & dz = 0 & x \in [x, x+\Delta x] \end{array}$$

$$\Delta_x u = u(M_1) - u(M) = \int_{M(x,y,z)}^{M_1(x+\Delta x,y,z)} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{x}^{x+\Delta x} P(x, y, z)\, dx \overset{T.M.}{=} P(\xi, y, z)\Delta x \qquad (35)$$

unde $\xi \in (x, x+\Delta x)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(\xi, y, z) \qquad (36)$$

Dacă $\Delta x \to 0$, atunci $\xi \to x$ şi deoarece $P(x, y, z)$ este continuă avem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y, z) \tag{37}$$

Similar, se poate arăta că:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y, z) \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z) \tag{38}$$

Corolar: Un câmp vectorial este potențial $\Leftrightarrow$ integrala curbilinie în câmp este independentă de conturul de integrare, adică dacă circulația câmpului vectorial pe orice contur închis din câmp este nulă.

- **Calcularea integralei curbilinii într-un câmp potențial**

Teorema2: Într-un câmp potențial $\vec{a}(M)$, integrala curbilinie $\int_{M_1}^{M_2} (\vec{a}, d\vec{r})$ este egală cu diferența valorilor potențialului câmpului $u(M)$ în punctul final şi inițial de integrare:

$$\int_{M_1}^{M_2} (\vec{a}, d\vec{r}) = u(M_2) - u(M_1) \tag{39}$$

Exemplu:

Ştim că potențialul cîmpului vectorului de poziție este $u(r) = \frac{r^2}{2} + c$, atunci:

$$\int_{M_1}^{M_2} (\vec{r}, d\vec{r}) = \frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) \tag{40}$$

unde r_i, $i = 1,2$ este distanța dintre originea sistemului de coordonate şi punctele M_i, $i = 1,2$.

- **Calcularea potențialului în coordonate carteziene**

Fie câmpul potențial:

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} \tag{41}$$

Funcția potențial $u(M)$ poate fi determinată cu formula:

$$u(x,y,z)=\int_{M_0}^{M} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz \tag{42}$$

Această integrală poate fi calculată mai convenabil după cum urmează. Fixăm punctul inițial $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şi îl conectăm cu punctul $M(x,y,z)$ printr-o linie poligonală $M_0M_1M_2M$ a cărui segmente sunt paralele cu axele de coordonate, anume $M_0M_1 \| Ox$, $M_1M_2 \| Oy$, $M_2M \| Oz$.

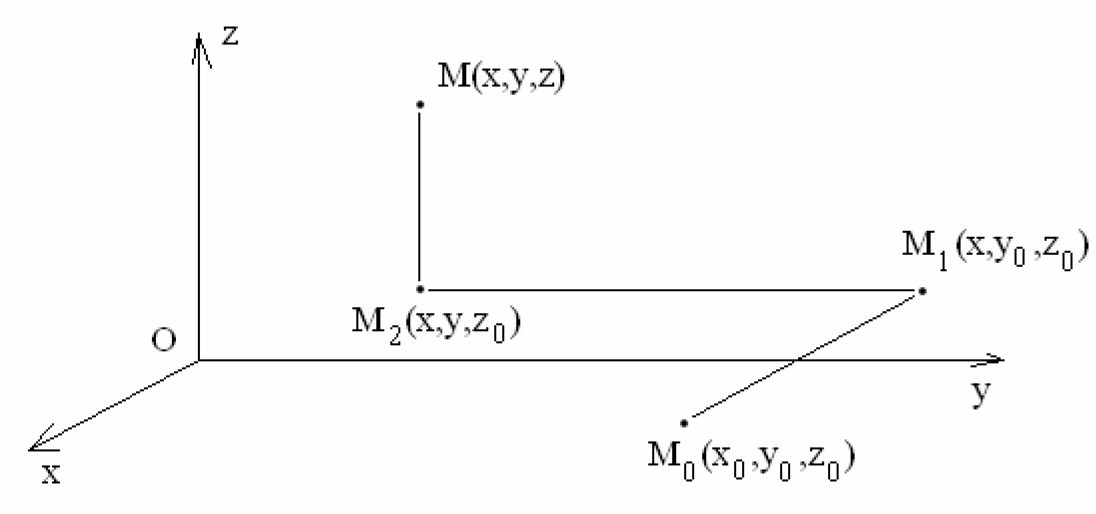


Figura 9.32

Pe fiecare segment variază o singură coordonată, ceea ce ne permite să simplificăm calculele, alegând aceea coordonată ca parametru. Astfel,

$$M_0M_1:\begin{cases} x=x & dx=dx \\ y=y_0 & dy=0 \\ z=z_0 & dz=0 \end{cases} \tag{43}$$

$$M_1M_2:\begin{cases} x=ct & dx=0 \\ y=y & dy=dy \\ z=z_0 & dz=0 \end{cases} \tag{44}$$

$$M_2M:\begin{cases} x=ct & dx=0 \\ y=ct & dy=0 \\ z=z & dz=dz \end{cases} \tag{45}$$

Potențialul va fi:

$$u(M)=\int_{M_0}^{M}(\vec{a},d\vec{r})=\int_{M_0}^{M_1}(\vec{a},d\vec{r})+\int_{M_1}^{M_2}(\vec{a},d\vec{r})+\int_{M_2}^{M}(\vec{a},d\vec{r})=$$

$$=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)\,dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)\,dz \qquad (46)$$

Exemplu:
Arătați că câmpul vectorial:

$$\vec{a}=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$$

este un câmp potențial şi determinați potențialul.

$$rot\ \vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y+z & x+z & x+y\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial(x+y)}{\partial y}-\frac{\partial(x+z)}{\partial z}\right)\vec{i}+$$

$$+\left(\frac{\partial(y+z)}{\partial z}-\frac{\partial(x+y)}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial(x+z)}{\partial x}-\frac{\partial(y+z)}{\partial y}\right)\vec{k}=0$$

9.11 Operatorul nabla

Până în prezent, am considerat trei operații de bază în analiza vectorială, anume:

- construcția $grad\ u$ pentru câmpul scalar $u=u(x,y,z)$
- construcția $div\ \vec{a}$ pentru câmpul vectorial $\vec{a}=\vec{a}(x,y,z)$
- construcția $rot\ \vec{a}$ pentru câmpul vectorial $\vec{a}=\vec{a}(x,y,z)$.

Aceste operații pot fi scrise în formă scurtă cu ajutorul simbolului operator *nabla*:

$$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (47)$$

Operatorul ∇ are proprietăți *diferențiale* şi *vectoriale*.

Putem scrie, cele trei operații de mai sus, formal, cu ajutorul operatorului ∇, ca şi când acesta ar fi un vector. În acest sens, reluăm cele trei operații:

1. Dacă $u = u(x, y, z)$ este o funcție scalară diferențiabilă, atunci cu regula de înmulțire a unui vector cu un scalar, avem:

$$\nabla u = \left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = grad\ u \qquad (48)$$

Adică: $\nabla u = grad\ u$

2. Dacă $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ unde *P*, *Q*, *R* sunt funcții scalare diferențiabile, atunci cu ajutorul produsului scalar, avem:

$$(\nabla, \vec{a}) = \nabla \cdot \vec{a} = \left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}, P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \right)$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = div\ \vec{a} \qquad (49)$$

adică $(\nabla, \vec{a}) = \nabla \cdot \vec{a} = div\ \vec{a}$

3. Dacă $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ unde *P*, *Q*, *R* sunt funcții scalare diferențiabile, atunci cu ajutorul produsului vectorial, avem:

$$[\nabla, \vec{a}] = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = rot\ \vec{a} \qquad (50)$$

adică $[\nabla, \vec{a}] = \nabla \times \vec{a} = rot\ \vec{a}$

Observații:

1. Dacă $u = C$, este o funcție scalară constantă, atunci $\nabla C = 0$,
iar dacă $\vec{a} = \vec{c}$ este un vector constant, atunci $(\nabla, \vec{c}) = 0$ şi $[\nabla, \vec{c}] = 0$

2. Proprietatea de distributivitate a produselor scalare şi vectoriale conduce la următoarele relații:

$$\left(\nabla, \vec{a} + \vec{b}\right) = (\nabla, \vec{a}) + \left(\nabla, \vec{b}\right) \qquad (51)$$

adică $div\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = div\ \vec{a} + div\ \vec{b}$

$$\left[\nabla, \vec{a} + \vec{b}\right] = [\nabla, \vec{a}] + \left[\nabla, \vec{b}\right] \qquad (52)$$

adică $rot\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = rot\ \vec{a} + rot\ \vec{b}$

Remarcă: Aceste ultime relații pot fi înțelese şi ca manifestare a proprietăților diferențiale ale operatorului ∇, care este un operator diferențial liniar.

S-a convenit că operatorul ∇ acționează pe toate cantitățile care se afle în dreapta lui şi

$$\left(\nabla,\vec{a}\right)\neq\left(\vec{a},\nabla\right) \tag{53}$$

Într-adevăr

$$\left(\nabla,a\right)=div\ \vec{a} \text{ este funcţia } \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\left(\vec{a},\nabla\right)=P\frac{\partial}{\partial x}+Q\frac{\partial}{\partial y}+R\frac{\partial}{\partial z} \text{ este un operator diferențial scalar.}$$

Observație: Atunci când acționăm cu operatorul ∇ pe un produs format din mai mulți factori, trebuie să avem în vedere regula de diferențiere a unui produs. Adică, trebuie să aplicăm operatorul ∇ pe fiecare factor succesiv, în timp ce păstrăm ceilalți factori nemodificați. Apoi sumăm expresiile obținute.

Regulă: Atunci cînd aplicăm operatorul ∇, prima dată luăm în considerare natura *diferențială* a operatorului şi apoi proprietățile *vectoriale*.

Exemple:

1. Arătați că:

$$grad\left(uv\right)=v\ grad\ u+u\ grad\ v$$

2. Fie $u\left(x,y,z\right)$ o funcție scalară diferențiabilă şi $\vec{a}\left(x,y,z\right)$ o funcție vectorială diferențiailă. Arătați că

$$div\left(u\vec{a}\right)=u\ div\ \vec{a}+\left(\vec{a},grad\ u\right)$$

Remarcă: Operatorul ∇ are proprietăți vectoriale dar nu este un vector, nu are marime si direcție.

Exemplu:

Produsul vectorial $\left[\nabla\varphi,\nabla\psi\right]$ cu φ şi ψ funcții scalare, formal seamănă cu produsul vectorial a doi vectori coliniari, produs care este nul. În general situația este alta: vectorul $\nabla\varphi=grad\varphi$ este normal la suprafața de nivel $\varphi=ct$, iar vectorul $\nabla\psi=grad\psi$ este normal la suprafața de nivel $\psi=ct$. Aceste normale nu sunt în general coliniare.

9.12 Operatori diferențiali de ordinul doi
Operatorul Laplace

Operatorii diferențiali de ordinul doi sunt rezultatul dublei aplicări a operatorului ∇ la câmpuri.

1. Fie câmpul scalar $u(x, y, z)$ şi

$$\nabla u = grad\ u$$

Pe câmpul vectorial $grad\ u$ pot fi definite două operații:

$$\begin{cases} (\nabla, \nabla u) = div(grad\ u) & \rightarrow scalar \\ [\nabla, \nabla u] = rot(grad\ u) & \rightarrow vector \end{cases}$$

2. Fie câmpul vectorial $\vec{a}(x, y, z)$ şi

$$(\nabla, \vec{a}) = div\ \vec{a}$$

Pe câmpul scalar $div\ \vec{a}$ poate fi definită operația:

$$\{\nabla(\nabla, \vec{a}) = grad(div\ \vec{a}) \quad \rightarrow vector$$

3. Fie câmpul vectorial $\vec{a}(x, y, z)$ şi

$$[\nabla, \vec{a}] = rot\ \vec{a}$$

Pe câmpul vectorial $rot\ \vec{a}$ pot fi definite două operații:

$$\begin{cases} (\nabla, [\nabla, \vec{a}]) = div(rot\ \vec{a}) & \rightarrow scalar \\ [\nabla, [\nabla, \vec{a}]] = rot(rot\ \vec{a}) & \rightarrow vector \end{cases}$$

Cele cinci operații obținute prin dubla aplicare a operatorului ∇, definesc operatorii diferențiali de ordinul doi.

Reluăm aceste definiții:

1. Presupunem că $u(x, y, z)$ are derivate parțiale secunde.

$$div\ grad\ u = (\nabla, \nabla u) = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Simbolul

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

se numeşte *operator Laplace* sau *Laplacian*.
Acesta poate fi reprezentat şi ca un produs scalar:

$$\Delta = (\nabla, \nabla) = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Operatorul Δ joacă rol important în fizica matematică. Ecuația:

$$\Delta u = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

se numeşte ecuația Laplace (ecuația staționară a căldurii).
Un câmp scalar $u(x, y, z)$ care satisface ecuația $\Delta u = 0$ se numeşte *câmp armonic*.

Exemplu:
Câmpul scalar $u = 2x^2 + 3y - 2z^2$ este armonic.

2. Presupunem că $u(x, y, z)$ are derivate parțiale secunde continue.

$$rot\ grad\ u = [\nabla, \nabla u] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right)\vec{k} = 0$$

3. Fie $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ un câmp vectorial cu componentele *P,Q,R* cu derivate parțiale continue de ordinul doi.
4.

$$grad\ div\ \vec{a} = \nabla(\nabla, \vec{a})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\vec{k}$$

5. Fie $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ un câmp vectorial cu componentele *P,Q,R* cu derivate parțiale continue de ordinul doi.

$div\ rot\ \vec{a} = 0$ $\qquad$ $rot\ \vec{a}$ câmp solenoidal

5. $rot\ rot\ \vec{a} = grad\ div\ \vec{a} - \Delta\vec{a}$

Într-adevăr, dacă se ia în considerare proprietatea vectorială:

$$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right] = \vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \left(\vec{a},\vec{b}\right)\vec{c}$$

$$\left[\nabla,[\nabla,\vec{a}]\right] = \nabla(\nabla,\vec{a}) - (\nabla,\nabla)\vec{a}$$

$$rot\ rot\ \vec{a} = grad\ div\ \vec{a} - \Delta\vec{a}$$

unde $\Delta\vec{a} = \Delta P\vec{i} + \Delta Q\vec{j} + \Delta R\vec{k}$.